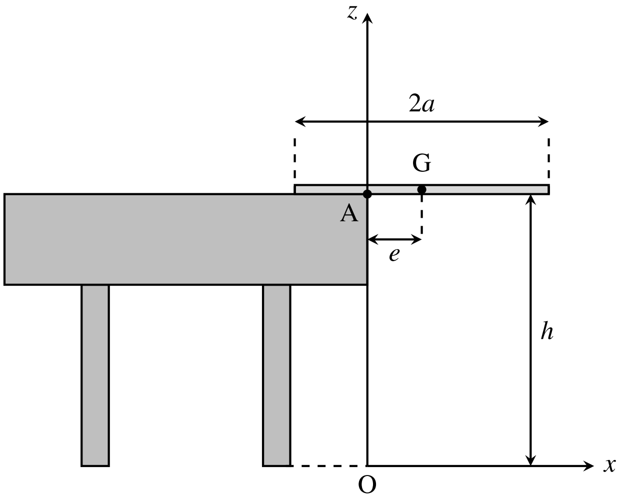
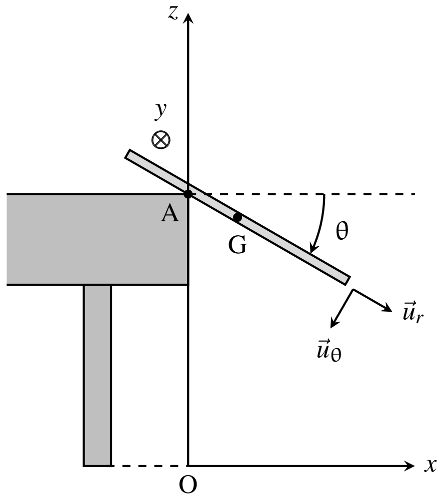
DM de physique n° 6

Exercice 1 : Chute d'une tartine beurrée



Situation initiale de la tartine



Tartine en mouvement de rotation sans glissement

Dans ce problème, nous allons tenter d'expliquer pourquoi les tartines tombent d'une table toujours du mauvais côté. Pour cela, on modélise la tartine par un parallélépipède indéformable de masse m, de longueur $2a$, de largeur b et d'épaisseur négligeable, initialement en position horizontale au bord d'une table, sans vitesse, de telle sorte que son centre d'inertie G est excentré d'une distance e par rapport au bord.

Dans cette position, la tartine ne peut pas rester en équilibre. Elle entame un mouvement de rotation, que l'on supposera dans un premier temps sans glissement, autour de l'axe $(\mathrm{A}y)$. Au cours de cette rotation, on repère la position de la tartine par l'angle θ qu'elle fait avec l'horizontale et on utilise la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ représentée sur le schéma ci-dessus. Le moment d'inertie de la tartine est $J_y = \frac{1}{3}ma^2 + me^2$.

On note $\vec{R} = N\vec{u}_\theta + T\vec{u}_r$ la réaction de la table sur la tartine et l'on supposera que le mouvement cette dernière vérifie les lois de Coulomb avec un coefficient de frottement solide $f = 1$.

Le bord supérieur de la table se trouve à l'altitude h au-dessus du sol.

Dans les calculs, on introduira la quantité $\eta = \dfrac{3e^2}{a^2 + 3e^2}$.

Pour les applications numériques, on prendra : $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $e = 3{,}0\,\mathrm{mm}$, $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

1. Appliquer le théorème du moment cinétique à la tartine par rapport à $(\mathrm{A}y)$ et montrer que :

$$\ddot{\theta} = K_1 \frac{g}{e} \cos\theta$$

où K_1 est une quantité positive sans dimension à exprimer en fonction de η.

2. Justifier que l'énergie mécanique de la tartine se conserve au cours du mouvement de rotation sans glissement. En déduire que :

$$\dot{\theta}^2 = K_2 \frac{g}{e} \sin\theta$$

où K_2 est une quantité positive sans dimension à exprimer en fonction de η.

3. Exprimer la position $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, la vitesse $\vec{v}_\mathrm{G}$ et l'accélération $\vec{a}_\mathrm{G}$ du centre d'inertie dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

4. Par application du principe fondamental de la dynamique, exprimer T et N en fonction de m, g, η et θ.

5. Déterminer numériquement η puis simplifier l'expression de N et T.

6. Justifier que la tartine commence nécessairement à glisser avant d'avoir effectué un quart de tour complet autour de $(\mathrm{A}y)$.

7. Déterminer numériquement l'angle θ_0 pour lequel la tartine se met à glisser.

8. Déterminer numériquement la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ de la tartine à l'instant où le glissement commence.

Par la suite, on néglige la durée du glissement et on suppose que la tartine entame instantanément un mouvement de chute libre, tout en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire dont on admet qu'elle reste constante et égale à $\dot{\theta}_0$. On cherche à estimer une valeur approchée de la durée de chute de la tartine en assimilant cette dernière à un point matériel situé en G. Par ailleurs, on considérera que $e \ll a$, ce qui permet de supposer que, en prenant comme origine des temps la date à laquelle le mouvement de chute libre commence, $z_{\mathrm{G}}(0) \simeq h$ et $v_{\mathrm{G}}(0) \simeq 0$.

9. Déterminer littéralement puis numériquement la durée de la chute libre de la tartine.

10. Donner l'expression de $\theta(t)$ au cours de la chute. En déduire la position angulaire de la tartine à l'instant où elle touche le sol. Conclure.

11. Quel résultat donnerait cette expérience si on la réalisait sur la Lune ? Justifier.

Exercice 2 : Détente d'un gaz

On envisage le dispositif dont le schéma est donné dans la figure 1.

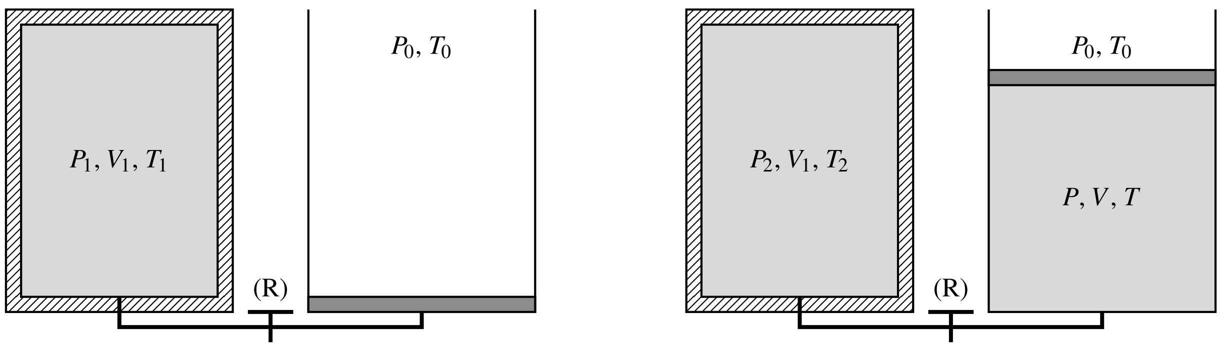


FIGURE 1 : Bouteille sous pression raccordée à une enceinte, avant ouverture du robinet (R) (à gauche) et après ouverture (à droite)

Une bouteille de volume fixe $V_1 = 100\,\mathrm{L}$ dont les parois sont athermanes (c'est-à-dire parfaitement calorifugées) contient du diazote à la pression $P_1 = 10{,}0\,\mathrm{bar}$ et la température $T_1 = 250\,\mathrm{K}$. Cette bouteille communique via un tube de raccord avec une enceinte aux parois diathermes, fermée par un piston étanche, mobile et de masse négligeable. L'enceinte est en contact mécanique et thermique avec l'atmosphère de pression $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ et température $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Au départ l'enceinte est vide et le robinet (R) du tube de raccord est fermé. Le diazote est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 28\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

1. Calculer la quantité de matière n_1, la masse volumique ρ_1 et l'énergie interne U_1 du diazote dans la bouteille.

On détend lentement le diazote de la bouteille en ouvrant le robinet (R), jusqu'à ce qu'un équilibre mécanique et thermique s'établisse dans tout le système.

2. Calculer la quantité de matière n_2 et l'énergie interne U_2 du diazote restant dans la bouteille.

3. Calculer le volume V de diazote dans l'enceinte.

On envisage désormais une détente rapide du diazote de la bouteille, au cours de laquelle on ouvre brièvement le robinet (R), juste assez longtemps pour que l'équilibre mécanique s'établisse dans le système mais pas l'équilibre thermique, puis on referme (R). On attend ensuite que l'équilibre thermique s'établisse entre l'enceinte et l'atmosphère, et on mesure $V = 968\,\mathrm{L}$.

4. Calculer la quantité de matière n_3, la température T_3 et l'énergie interne U_3 du diazote restant dans la bouteille.

Exercice 3 : Élévation d'un ballon dans la troposphère

L'atmosphère est constituée d'un mélange gazeux (l'air) comprenant surtout le diazote (78% en volume) et le dioxygène (21%). On y trouve également de l'argon (environ 1%), du dioxyde de carbone (0,03%), de la vapeur d'eau en proportion variable et des traces d'une multitude d'autres gaz.

Données des masses molaires en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ N : 14   O : 16   Ar : 40

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

On suppose dans tout le problème que l'air, sec, est un mélange idéal de gaz parfaits. On considère que l'intensité de la pesanteur est uniforme : $g = 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Montrer à partir de la composition de l'air que la masse molaire de l'air vaut $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Équilibre polytropique de l'atmosphère.
On suppose que dans la troposphère, c'est-à-dire jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air varie avec l'altitude sous la forme : $T(z) = T_0(1 - kz)$ où k est une constante positive.

2. Montrer que la pression à l'altitude z varie sous la forme $P(z) = P_0(1 - kz)^{\alpha}$.
Donner l'expression de α en fonction de M, g, k, R et T_0.

3. Donner l'expression de $\mu(z)$ en fonction de μ_0, z, k et α.
AN : $k = 2,20 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^{-1}}$; $T_0 = 288\,\mathrm{K}$. Calculer $P(z)$ et $\mu(z)$ pour $z = 5,0\,\mathrm{km}$.

Application : ascension d'un ballon à hélium.
On se place toujours dans le modèle de l'équilibre polytropique de l'atmosphère. Un ballon de volume maximal $V_{\max} = 1000\,\mathrm{m^3}$ est partiellement gonflé au sol avec un volume $V_0 = 500\,\mathrm{m^3}$ d'hélium. La masse totale de l'enveloppe (hélium non compris) et de la nacelle est $m = 450\,\mathrm{kg}$. L'enveloppe est munie d'une soupape qui assure l'équilibre thermique et mécanique entre l'hélium et l'air extérieur.

4. Montrer que le rapport des masses volumiques de l'hélium contenu dans l'enveloppe et de l'air extérieur $d = \mu_{\mathrm{He}}/\mu_{\mathrm{air}}$ est indépendant de l'altitude lors de l'ascension. Calculer d sachant que la masse molaire de l'hélium vaut $M_{\mathrm{He}} = 4\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

5. On appelle force ascensionnelle la somme des forces extérieures s'exerçant sur le ballon, en mouvement rectiligne le long de l'axe (Oz).
Déterminer l'expression de cette force au sol, en fonction de g, m, d, μ_0 et V_0.

6. À quelle condition le ballon s'élève-t-il ? Cette condition est-elle remplie ici ?

7. Exprimer le volume $V(z)$ au cours de l'ascension tant que $V(z) < V_{\max}$ (le nombre de moles d'hélium dans le ballon restant constant pendant cette phase).

8. Calculer l'altitude maximale z_1 atteinte lorsque le volume atteint sa valeur maximale.

9. Lorsque le ballon atteint cette altitude, le volume de l'enveloppe reste constant. Le ballon continuant à s'élever, le gaz sort alors par la soupape pour assurer l'équilibre thermique et mécanique avec l'air extérieur.
Montrer que la force ascensionnelle décroît jusqu'à s'annuler : la ballon atteint alors son plafond d'altitude : calculer l'altitude correspondante z_2.