Devoir n°25 (non surveillé)

EXERCICE 1

Les propositions suivantes, où (u_n), (v_n) et (a_n) sont des suites réelles qui ne s'annulent pas, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $u_{n+1} \sim u_n$.

2) Si $u_n \sim v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $u_n \sim v_n$.

4) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim \ell$.

5) Si $u_n = o(v_n)$, alors $a_n u_n = o(a_n v_n)$.

6) Si $u_n = o(v_n)$, alors $a_n + u_n = o(a_n + v_n)$.

7) Si $a_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et que $u_n \sim v_n$, alors $a_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

8) Si $u_n \sim v_n$ et que (v_n) est croissante, alors (u_n) aussi.

9) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

10) Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sin u_n \sim \sin v_n$.

EXERCICE 2

Montrer que la fonction f définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $a = (-1,2,1)$, $b = (0,1,-1)$, $u = (1,0,-3)$ et $v = (-2,5,1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(a,b) = \mathrm{Vect}(u,v)$.

EXERCICE 4

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

3) Montrer que F et G sont supplémentaires.