Correction du DNS 22

Partie 1

1) L'intervalle $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de cet intervalle,

$$f_n(-x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin}(-x)) = \sin(-2n \operatorname{Arcsin} x) = -\sin(2n \operatorname{Arcsin} x) = -f(x).$$

La fonction f_n est donc impaire.

On a $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ donc $f_n(0) = 0$, et $\operatorname{Arcsin} 1 = \dfrac{\pi}{2}$ donc $f_n(1) = \sin n\pi = 0$.

2) Soit $x \in [0,1]$. Alors :

$$\begin{aligned} f_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2n \operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 2n \operatorname{Arcsin} x = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \operatorname{Arcsin} x = \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Or $\operatorname{Arcsin}([0,1]) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \dfrac{k\pi}{2n}$ n'a de solutions sur $[0,1]$ que si $0 \leqslant \dfrac{k\pi}{2n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si $0 \leqslant k \leqslant n$. Dans ce cas, $\operatorname{Arcsin} x = \dfrac{k\pi}{2n} \Leftrightarrow x = \sin \dfrac{k\pi}{2n}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $[0,1]$ est donc $\mathcal{S} = \left\{ \sin \dfrac{k\pi}{2n} \mid 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$. Comme la fonction sinus est strictement croissante sur $[0,\pi]$, ces solutions sont deux à deux distinctes. Il y en a donc $n+1$.

3) a) La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, par composition, la fonction f_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_n'(x) = \cos(2n \operatorname{Arcsin} x) \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n \cos(2n \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) La limite de $\operatorname{Arcsin} x$ quand x tend vers 1 est $\pi/2$ donc celle de $\cos(2n \operatorname{Arcsin} x)$ est $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Par conséquent

$$\lim_{x \to 1} \frac{2n \cos(2n \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Par le théorème de limite de la dérivée on en déduit que f_n n'est pas dérivable en 1. Sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 (même chose en -1 puisque f_n est impaire).

4) Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Par conséquent, $\operatorname{Arcsin} x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ (DL d'une primitive en utilisant le fait que $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$).

On a donc, au voisinage de 0, $f_n(x) = \sin\left(2nx + \dfrac{nx^3}{3} + o(x^3)\right)$. Or $\sin X = X - \dfrac{X^3}{6} + o(X^3)$ au voisinage de 0, donc :

$$\begin{aligned} f_n(x) &\overset{0}{=} 2nx + \frac{nx^3}{3} - \frac{8n^3x^3}{6} + o(x^3) \\ &\overset{0}{=} 2nx + \frac{n-4n^3}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

5) Posons le changement de variables $t = \operatorname{Arcsin} x$. Alors $x = \sin t$, donc $dx = \cos t\, dt$, et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin(2nt)\cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} - \frac{\cos((2n-1)t)}{2n-1} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}. \end{aligned}$$

6) a) On a vu que f_1 est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f_1'(x) = \dfrac{2\cos(2\operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in\,]-1,1[$. Or :

$$\begin{aligned}\cos(2\operatorname{Arcsin} x) > 0 &\Leftrightarrow -\pi/2 < 2\operatorname{Arcsin} x < \pi/2\\ &\Leftrightarrow -\pi/4 < \operatorname{Arcsin} x < \pi/4\\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2,\end{aligned}$$

donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\left[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-1, -\sqrt{2}/2\right]$ et $\left[\sqrt{2}/2, 1\right]$. On a facilement $f_1\left(\sqrt{2}/2\right) = 1$ et $f_1\left(-\sqrt{2}/2\right) = -1$.

On a vu en 4) que $f_1(x) = 2x - x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. Une équation de la tangente à la courbe à l'origine est donc $y = 2x$, et, au voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente pour $x < 0$ et en-dessous pour $x > 0$ (point d'inflexion).

b) D'après la question 5, on a $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx = \frac{2}{3}$. L'unité graphique étant de 4 cm, l'unité d'aire est de 16 cm^2, donc l'aire recherchée vaut $\dfrac{32}{3}$ cm^2.

Partie 2

1) a) Pour tout réel θ, on a $\cos(2n\theta) + i\sin(2n\theta) = e^{2ni\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{2n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}$ (formule de Moivre).

D'après la formule du binôme de Newton, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (\cos\theta)^{2n-p} i^p (\sin\theta)^p$.

Or $\sin(2n\theta)$ est la partie imaginaire de $\cos(2n\theta) + i\sin(2n\theta)$, et $i^p = 1$ ou -1 si p est pair et i ou $-i$ si p est impair. Dans la somme on prend donc uniquement les termes d'indice p impair, pour lesquels on pose $p = 2k+1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(2n\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (\cos\theta)^{2n-2k-1} i^{2k+1} (\sin\theta)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (\cos\theta)^{2n-2k-1} (\sin\theta)^{2k+1}.\end{aligned}$$

b) On a donc :

$$\begin{aligned}\sin(2n\theta) &= \sin\theta\cos\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k (\cos\theta)^{2n-2k-2} (\sin\theta)^{2k}\\ &= \sin\theta\cos\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \left(\cos^2\theta\right)^{n-k-1} (\sin\theta)^{2k}\\ &= \sin\theta\cos\theta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \left(1-\sin^2\theta\right)^{n-k-1} (\sin\theta)^{2k}\\ &= \sin\theta\cos\theta P_n(\sin\theta)\end{aligned}$$

puisque $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} (-1)^k \left(1-X^2\right)^{n-k-1} X^{2k}$.

2) a) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$f_n(x) = \sin(2n\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) P_n(\sin(\operatorname{Arcsin} x)) = x\sqrt{1-x^2} P_n(x).$$

b) On trouve $P_1 = 2$, $P_2 = -8X^2 + 4$ et $P_3 = 32X^4 - 32X^2 + 6$ (calculs à détailler).

3) D'après la formule du binôme de Newton, $(1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} 1^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p}$, donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = 2^{2n}$, et $(1-1)^{2n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p$, donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-1)^p = 0$.

En séparant dans chacune des sommes précédentes les termes d'indice pair, pour lesquels on pose $p = 2k$, et les termes d'indice impair, pour lesquels on pose $p = 2k+1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 0.$$

En soustrayant ces deux égalités on obtient $2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}=2^{2n}$, d'où $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}=2^{2n-1}$.

4) a) En développant $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k\left(1-X^2\right)^{n-k-1}X^{2k}$ on n'obtiendra que des termes de degrés pairs.

b) Le terme de plus haut degré dans le développement de $(-1)^k\left(1-X^2\right)^{n-k-1}X^{2k}$ est $(-1)^k\left(-X^2\right)^{n-k-1}X^{2k}=(-1)^k(-1)^{n-k-1}X^{2n-2k-2}X^{2k}=(-1)^{n-1}X^{2n-2}$.

Par conséquent, le terme de plus haut degré de P_n est $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^{n-1}X^{2n-2}=(-1)^{n-1}X^{2n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$.

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}=2^{2n-1}$ donc le terme de plus haut degré de P_n est $(-1)^{n-1}2^{2n-1}X^{2n-2}$.

Le polynôme P_n est donc de degré $2n-2$ et son coefficient dominant est $(-1)^{n-1}2^{2n-1}$.

c) Calculons $P_n(0)$. Dans la formule $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k\left(1-X^2\right)^{n-k-1}X^{2k}$, si on remplace X par 0, tous les termes s'annulent sauf pour $k=0$. On a donc $P_n(0)=\binom{2n}{1}=2n$.

d) Calculons de même $P_n(1)$. Dans la formule $P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k\left(1-X^2\right)^{n-k-1}X^{2k}$, si on remplace X par 1, tous les termes s'annulent sauf pour $k=n-1$. On a donc $P_n(1)=\binom{2n}{2n-1}(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}2n$.

5) a) Puisque $f_n(x)=x\sqrt{1-x^2}P_n(x)$ pour tout $x\in[-1,1]$ et que $P_n(0)\neq 0$ et $P_n(1)\neq 0$, les solutions sur $[0,1]$ de l'équation $P_n(x)=0$ sont les solutions sur $[0,1]$ de l'équation $f_n(x)=0$ différentes de 0 et 1. L'ensemble de ces solutions est donc $\mathcal{S}_{[0,1]}=\left\{\sin\frac{k\pi}{2n}\mid 0<k<n\right\}$.

L'ensemble des solutions sur $[-1,1]$ de l'équation $P_n(x)=0$ est $\mathcal{S}_{[-1,1]}=\left\{\sin\frac{k\pi}{2n}\mid 0<k<n\right\}\cup\left\{-\sin\frac{k\pi}{2n}\mid 0<k<n\right\}$ car la fonction polynomiale P_n est paire.

Cela nous donne déjà $(n-1)+(n-1)=2n-2$ racines distinctes du polynôme P_n. Or celui-ci est de degré $2n-2$, donc il n'y en a pas d'autres. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $P_n(x)=0$ est donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\mathcal{S}_{[-1,1]}=\left\{\sin\frac{k\pi}{2n}\mid 0<k<n\right\}\cup\left\{-\sin\frac{k\pi}{2n}\mid 0<k<n\right\}$

b) Posons $u_n=\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$.

Le produit des racines du polynôme P_n est $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\prod_{k=1}^{n}\left(-\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=(-1)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2=(-1)^{n-1}u_n^2$. Or P_n est un polynôme scindé de degré $2n-2$, son coefficient constant est $P_n(0)=2n$ et son coefficient dominant est $(-1)^{n-1}2^{2n-1}$, donc le produit de ses racines est égal à $(-1)^{2n-2}\frac{2n}{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{2n-2}}$ (cf cours).

On a donc $(-1)^{n-1}u_n^2=\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{2n-2}}$ d'où $u_n=\sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.