

TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

Exercice 1 : Atmosphère et vitesse de libération

Par définition, la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'une molécule de masse m est telle que $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$. À partir de sa masse molaire M , on peut déterminer la masse d'une molécule grâce à la relation $m = \frac{M}{N_A}$, d'où :

$$u^2 = 3 \frac{k_B N_A}{M} T = \frac{3RT}{M} \iff u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

où R est la constante des gaz parfaits. Sachant que $M(\text{H}_2) = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, on obtient les valeurs numériques suivantes sur la Terre :

$$u(\text{H}_2) = 1,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u(\text{N}_2) = 0,52 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u(\text{O}_2) = 0,48 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

et sur la Lune :

$$u(\text{H}_2) = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u(\text{N}_2) = 0,67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad u(\text{O}_2) = 0,62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour discuter de la possibilité d'une atmosphère à la surface de la Lune, comparons ces vitesses quadratiques à la vitesse de libération à la surface de la Lune :

$$v_{\text{lib}}(\text{Lune}) = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = 2,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

La probabilité pour qu'une molécule de dihydrogène quitte l'attraction lunaire (quand celle-ci se trouve du côté éclairé par le soleil) est très importante. Pour des molécule plus lourdes, elle est plus faible mais non négligeable. À la surface de la Lune, la gravité n'est pas suffisamment importante pour qu'une atmosphère puisse se maintenir sur le long terme.

★ Exercice 2 : Dissociation du brome

1. On applique la loi des gaz parfait au dibrome gazeux :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT}{PM(\text{Br}_2)} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \cdot 873}{1,0 \cdot 10^5 \cdot 160 \cdot 10^{-3}} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 0,45 \text{ L}$$

2. Si l'on néglige la dissociation, il n'y a qu'à appliquer à nouveau la loi des gaz parfaits :

$$V = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \cdot 1873}{1,0 \cdot 10^5 \cdot 160 \cdot 10^{-3}} = 0,97 \text{ L}$$

3. Si une molécule de dibrome se dissocie en deux atomes de brome, cela fait mécaniquement augmenter la quantité de matière totale en gaz. Dressons le tableau d'avancement molaire de la réaction, en notant $n_0 = \frac{m}{M}$ la quantité de matière initiale en dibrome et ξ l'avancement molaire à l'équilibre.

	Br ₂	→	2Br
État initial	n_0		0
État final	$n_0 - \xi$		2ξ

Le coefficient de dissociation est défini par $x = \frac{\xi}{n_0}$.

La quantité de matière totale en gaz, à l'équilibre, vaut $n_g = n_0 - \xi + 2\xi = n_0 + \xi = n_0(1+x)$. D'après la loi des gaz parfaits, le volume V' réellement mesuré vaut :

$$V' = \frac{n_0(1+x)RT}{P} = V(1+x) \iff x = \frac{V'}{V} - 1 = 0,23$$

Il y a 23% des molécules de dibrome qui se sont dissociées.

★ Exercice 3 : Pompe à air

L'enceinte a un volume et une température fixés. La pression augmente car on injecte de la matière à l'intérieur de l'enceinte, ce qui accroît la **quantité de matière en air**. Pour déterminer la pression dans l'enceinte, nous allons calculer la quantité de matière totale en air qui s'y trouve après N aller-retours du piston.

Initialement, il y a déjà de l'air dans l'enceinte puisque la pression est non nulle. D'après la loi des gaz parfaits, la quantité initiale n_0 en air vaut :

$$n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT}$$

Au cours d'un aller-retour du piston, la **totalité** de l'air qui se trouve dans le réservoir s'écoule dans l'enceinte. Dans le réservoir, l'air occupe un volume V_1 à la pression P_0 . La quantité de matière qui entre dans l'enceinte à chaque aller-retour du piston vaut donc :

$$n_1 = \frac{P_0 V_1}{RT}$$

Après N aller-retour du piston, la quantité de matière en air dans l'enceinte vaut :

$$n_{\text{air}} = n_0 + N n_1 = \frac{P_0 (V_0 + N V_1)}{RT}$$

et la pression vaut :

$$P = \frac{n_{\text{air}} RT}{V_0} = P_0 \left(1 + N \frac{V_1}{V_0} \right) = 1,2 \text{ bar}$$

TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

★ Exercice 4 : État d'équilibre final

Dans cet exercice on notera avec l'indice f les grandeurs à l'état final. Il s'agit de déterminer l'état d'équilibre final dans chacune des deux enceintes, ce qui signifie qu'il y a six inconnues : P_{1f} , V_{1f} , T_{1f} , P_{2f} , V_{2f} , T_{2f} .

Dans ce type d'exercice, il est nécessaire d'établir un système contenant autant d'équations que d'inconnues, afin d'arriver au bout du calcul. Chacune de ces équations vient d'une donnée de l'énoncé. Nous allons faire l'inventaire de toutes les relations que l'on peut écrire entre ces différentes grandeurs :

- le piston est libéré, ce qui signifie qu'à l'état final, il est en équilibre mécanique : $P_{1f} = P_{2f}$. Par la suite, on notera P_f cette pression commune ;
- les parois de l'enceinte sont diathermes donc les gaz des deux compartiments sont en équilibre thermique avec l'extérieur à l'état final : $T_{1f} = T_{2f} = T_0 = 300\text{K}$;
- le gaz de chaque enceinte est un gaz parfait, donc à l'état d'équilibre final :

$$V_{1f} = \frac{n_1 R T_0}{P_f} \quad (1) \quad \text{et} \quad V_{2f} = \frac{n_2 R T_0}{P_f} \quad (2)$$

- Le cylindre est indéformable donc le volume total se conserve :

$$V_1 + V_2 = V_{1f} + V_{2f} = \frac{(n_1 + n_2) R T_0}{P_f} \iff P_f = \frac{(n_1 + n_2) R T_0}{V_1 + V_2} = 1,2 \text{ bar}$$

On conclut en calculant les volumes :

$$V_{1f} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) = 1,0 \text{ L} \quad \text{et} \quad V_{2f} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} (V_1 + V_2) = 2,0 \text{ L}$$

★ Exercice 5 : Déplacement d'un piston par chauffage

1. Le raisonnement est analogue à celui de l'exercice 4. Il y a trois inconnues à déterminer : V_{Af} , V_{Bf} et la pression finale P_f (l'énoncé admet déjà l'égalité des pressions de part et d'autre du piston, qui est une conséquence de l'équilibre mécanique final). Il s'agit donc de trouver trois relations entre ces grandeurs pour fermer le système :

- les deux enceintes contiennent un gaz parfait donc à l'état final :

$$V_{Af} = \frac{n R T_1}{P_f} \quad (1) \quad \text{et} \quad V_{Bf} = \frac{n R T_0}{P_f} \quad (2)$$

- Le cylindre est indéformable donc le volume total se conserve :

$$V_{Af} + V_{Bf} = 2V_0 \quad (3) \iff \frac{nR}{P_f} (T_1 + T_0) = 2V_0 \iff P_f = \frac{nR(T_1 + T_0)}{2V_0}$$

On détermine les volumes V_{Af} et V_{Bf} grâce aux équations (1) et (2) :

$$V_{Af} = \frac{2T_1}{T_1 + T_0} V_0 \quad \text{et} \quad V_{Bf} = \frac{2T_0}{T_1 + T_0} V_0$$

2. Chaque compartiment contient un gaz parfait diatomique donc $C_V = \frac{5}{2} nR$. La variation d'énergie interne du gaz contenu dans chaque enceinte vaut :

$$\Delta U_A = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) \quad \text{et} \quad \Delta U_B = \frac{5}{2} nR(T_0 - T_0) = 0$$

L'énergie interne est une grandeur **extensive** donc : $\Delta U_{\{A+B\}} = \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0)$.

★ Exercice 6 : Mesure de la capacité thermique du dioxygène

La capacité thermique à volume constant d'un corps est définie par $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Cela signifie que, si l'on maintient le volume du système constant, alors une variation infinitésimale d'énergie interne dU correspondra à une variation de température dT selon la relation : $dU = C_V dT$.

Bien sûr, il est impossible d'apporter expérimentalement au système une quantité d'énergie interne infinitésimale, au sens mathématique du terme. Nous allons ici faire une approximation qui consiste à dire que l'apport d'énergie interne δU est suffisamment faible pour écrire :

$$\delta U \approx C_V \delta T \iff C_V \approx \frac{\delta U}{\delta T}$$

Cette approximation peut se justifier par le fait que la variation relative de température est faible ($\frac{\Delta T}{T} \approx 2\%$). Avec les données de l'énoncé, on obtient numériquement : $C_V = \frac{3,6 \cdot 10^{-3}}{28,5} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Pour déterminer la capacité thermique molaire à volume constant, il faut diviser C_V par la quantité de matière en gaz à l'intérieur de l'ampoule, que l'on peut déterminer avec la loi des gaz parfaits :

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(36 \cdot 133) \cdot 15 \cdot 10^{-6}}{8,31 \cdot 1440} = 6,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \iff C_{Vm} = \frac{C_V}{n} = 21 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On en déduit la valeur de la capacité thermique massique à volume constant :

$$c_V = \frac{C_{Vm}}{M} = 6,6 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

En théorie, un gaz parfait diatomique dont seuls les degrés de liberté de rotation ne sont pas gelés possède une capacité thermique molaire à volume constant égale à $C_{Vm} = \frac{5}{2} R = 21 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

La valeur expérimentale obtenue est tout à fait compatible avec le modèle du gaz parfait diatomique pour le dioxygène, dans ces conditions de température et de pression.

TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

★ Exercice 7 : Étude d'un gaz réel de Clausius

1. $PV = nRT$. Un gaz est parfait si l'on peut **négliger le volume des particules** qui le composent, ainsi que **les interactions à distance** entre elles.

2.a) Pour une quantité de matière n quelconque, le volume vaut $V = nV_m$ donc :

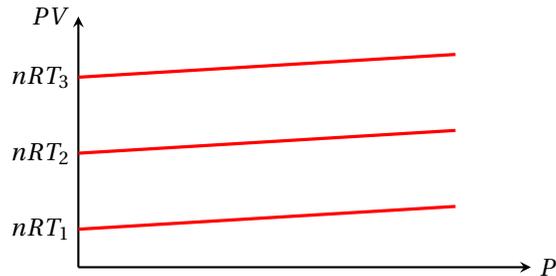
$$P \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT \iff P(V - nb) = nRT$$

2.b) On raisonne par analogie avec **l'équation d'état de Van der Waals**. Le gaz de Clausius est intermédiaire entre le gaz parfait et le gaz de Van der Waals. Dans cet équation, le seul terme correctif porte sur le volume. Cela signifie que dans un gaz de Clausius, **on continue de négliger les interactions à distance entre particules**. En revanche, **on ne néglige plus le volume propre des particules**.

2.c) D'après l'équation d'état de Clausius :

$$PV - nbP = nRT \iff PV = nbP + nRT$$

La relation entre PV et P est **affine**, de coefficient directeur nb et d'ordonnée à l'origine nRT . Si l'on suppose que b ne dépend pas de la température (ce qui semble une hypothèse raisonnable pour le volume propre des particules), alors les isothermes du gaz de Clausius, sur un diagramme d'Amagat, auront cette allure :

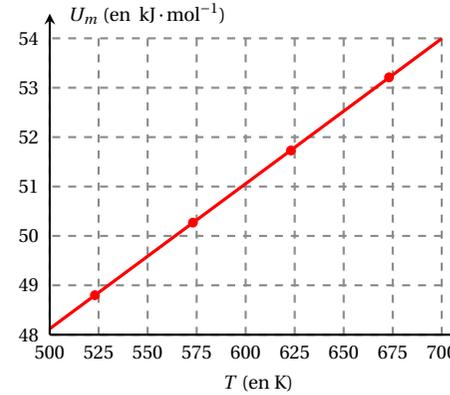


Pour déterminer la valeur de b , il suffit de **mesurer le coefficient directeur de ces isothermes**.

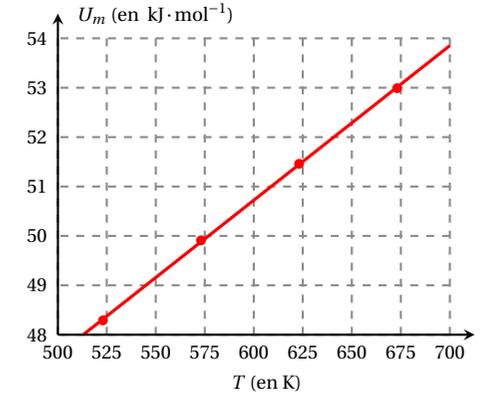
2.d) Lorsque $P \rightarrow 0$ (gaz de plus en plus dilué), on a $PV \approx nRT$. **On retrouve le comportement du gaz parfait dans la limite du gaz infiniment dilué.**

★★ Exercice 8 : Énergie interne d'un gaz parfait et d'un gaz réel

1. Pour déterminer l'énergie interne massique, on utilise la relation : $U_m = uM$ où M est la masse molaire de la vapeur d'eau. On trace ci-dessous les variations de U_m avec la température, ainsi que les modèles affines obtenus par régression pour chacune des deux pressions.



$$\begin{aligned} U_m &= aT + b \\ a &= 29,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ r &= 0,999997 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} U_m &= aT + b \\ a &= 31,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ r &= 0,999912 \end{aligned}$$

En théorie, pour un gaz parfait monoatomique, la relation entre l'énergie interne et la température s'écrit sous la forme :

$$U_m(T) = C_{V,m}T + C^{te} = \frac{3}{2}RT + C^{te}$$

La relation $U_m(T)$ est donc théoriquement affine, avec un coefficient directeur indépendant de la pression

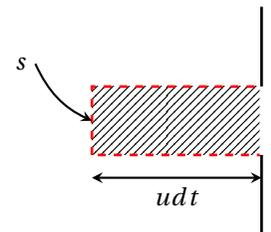
$$a = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

D'après les données expérimentales, la relation $U_m(T)$ pour la vapeur d'eau est bien affine, mais le coefficient directeur est très différent de celui du modèle du gaz parfait monoatomique. On pouvait s'y attendre pour de la vapeur d'eau qui n'est effectivement pas un gaz monoatomique.

3.) Pour un gaz parfait, la relation $U_m(T)$ doit être affine et le coefficient directeur, qui s'identifie à la capacité thermique molaire à volume constant, doit être indépendant de la pression, **d'après la première loi de Joule**. Pour la vapeur d'eau, on constate que $C_{V,m}$ dépend légèrement de la pression. Dans ce domaine de températures et de pressions, **le comportement de la vapeur d'eau n'est pas celui d'un gaz parfait, mais il en est proche.**

★★ Exercice 9 : Effusion par un trou

1. Dans cette question, on adopte un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir la relation entre la pression cinétique et la vitesse quadratique moyenne pour un gaz parfait (vous avez sans doute reconnu les hypothèses simplificatrices, qui sont les mêmes qu'en cours). L'idée est de compter la quantité infinitésimale d'atomes d'hélium qui sort de l'enceinte, entre t et $t + dt$, en effectuant un bilan de matière sur un volume élémentaire de gaz, autour du trou (voir figure ci-dessous).



TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

Les atomes qui ont le temps de sortir du trou, entre t et $t + dt$, se trouvent à l'intérieur d'un cylindre de hauteur $u dt$ et de section s . En revanche, tous les atomes qui se trouvent dans ce volume ne vont pas sortir de l'enceinte. Seuls ceux qui se dirigent vers le trou vont sortir, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$ des atomes qui se trouvent dans ce cylindre.

Le bilan de matière s'écrit donc de la manière suivante :

$$dN = N(t + dt) - N(t) = -\frac{1}{6} n^* dV$$

où $dV = s \cdot u dt$ est le volume du cylindre élémentaire et n^* est la densité particulaire du gaz. Le signe - vient du fait que dN est la **variation** du nombre d'atomes dans l'enceinte. Puisque les atomes quittent l'enceinte entre t et $t + dt$, dN est **négligatif** ($N(t + dt) < N(t)$). Pour finir le calcul, on exploite le fait que le gaz est supposé réparti de manière homogène dans toute l'enceinte, ce qui signifie que $n^* = \frac{N}{V}$ et donc que :

$$\boxed{dN = -\frac{Nus}{6V} dt}$$

2. On transforme rapidement l'équation précédente pour obtenir l'équation différentielle ci-dessous :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} + \frac{us}{6V} N = 0}$$

Cette équation est caractéristique d'un **régime libre transitoire** de constante de temps $\tau = \frac{6V}{us}$.

La condition initiale s'obtient en appliquant la loi des gaz parfaits à la date $t = 0$:

$$N_0 = \mathcal{N}_A n_0 = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{RT}$$

Avec cette condition initiale, on détermine le nombre d'atomes d'hélium puis la pression dans l'enceinte, à tout instant :

$$\boxed{N(t) = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{RT} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{P(t) = \frac{N(t) RT}{\mathcal{N}_A V} = P_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

La pression a diminué de moitié dans l'enceinte à la date t telle que :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2} \iff \boxed{t = \tau \ln 2}$$

Pour déterminer numériquement τ , il faut connaître la valeur de la vitesse quadratique moyenne. Celle-ci doit être reliée à la température T , dont l'énoncé donne la valeur.

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T \iff u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

L'enceinte est à moitié remplie à la date :

$$\boxed{t = \frac{6V}{s} \sqrt{\frac{M}{3RT}} \ln 2 = 35,6 \text{ jours}}$$

3. On réalise à nouveau un bilan de matière, dans les deux enceintes désormais. On note N_1 et N_2 la quantité d'atomes d'hélium dans chaque enceinte. Le nombre de particules qui sortent de l'enceinte 1, entre t et $t + dt$, vaut $\frac{N_1 us}{6V} dt$ ($\frac{N_2 us}{6V} dt$ pour l'enceinte 2). En tenant compte des deux sens de déplacement des atomes à travers le trou, le bilan de matière pour chaque enceinte s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} dN_1 = -\frac{N_1 us}{6V} dt + \frac{N_2 us}{6V} dt \\ dN_2 = \frac{N_1 us}{6V} dt - \frac{N_2 us}{6V} dt \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} + \frac{us}{6V} N_1 = \frac{us}{6V} N_2 & (1) \\ \frac{dN_2}{dt} + \frac{us}{6V} N_2 = \frac{us}{6V} N_1 & (2) \end{cases}$$

On obtient un système d'équations différentielles couplées pour $N_1(t)$ et $N_2(t)$. Ici, on utilise une méthode archi-classique pour découpler ces deux équations. On définit $S(t) = N_1(t) + N_2(t)$ et $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$. En écrivant (1) + (2) et (1) - (2), on obtient deux équation différentielles découplées pour $S(t)$ et $D(t)$:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{dD}{dt} + \frac{us}{3V} D = 0}$$

La première équation signifie que le nombre total d'atomes $N_1 + N_2$ se conserve au cours du temps, ce qui est logique puisque les atomes circulent d'une enceinte à l'autre mais ne s'échappent pas à l'extérieur.

$$S(t) = N_1(t) + N_2(t) = N_1^0 + N_2^0 = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{RT}$$

La deuxième équation signifie que l'écart entre N_1 et N_2 se réduit au cours du temps, de façon exponentielle. Là encore, c'est tout à fait logique. L'évolution naturelle des quantités de gaz doit tendre vers un état d'équilibre dans lequel il y a autant de particules de part et d'autres puisque les deux enceintes ont le même volume et la même température.

$$D(t) = N_1(t) - N_2(t) = (N_1^0 - N_2^0) \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{RT} \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$$

où $\tau' = \frac{us}{3V}$ est la nouvelle constante de temps du système. À partir des expressions de $S(t)$ et $D(t)$, on en déduit celles de $N_1(t)$ et $N_2(t)$:

$$N_1(t) = \frac{S(t)+D(t)}{2} = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{2RT} \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right) \quad \text{et} \quad N_2(t) = \frac{S(t)-D(t)}{2} = \frac{P_0 V \mathcal{N}_A}{2RT} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$$

puis celles de $P_1(t)$ et $P_2(t)$:

$$\boxed{P_1(t) = \frac{P_0}{2} \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2(t) = \frac{P_0}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)}$$

Les deux pressions tendent vers la même valeur asymptotique $P_\infty = \frac{P_0}{2}$. Le résultat était attendu ; à **l'état final, les atomes sont répartis à parts égales dans les deux enceintes.**

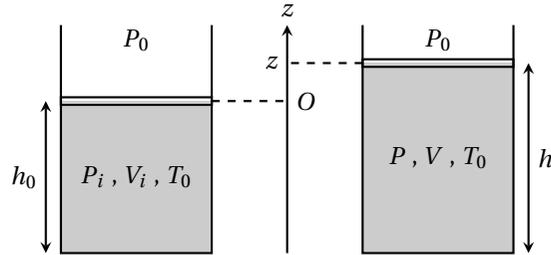
TD21 : Description des systèmes thermodynamiques - corrigé

★★ Exercice 10 : Oscillations d'un piston

1. L'équilibre mécanique du piston impose que la pression interne vaut $P_i = P_0 + \frac{mg}{S}$. D'après la loi des gaz parfaits :

$$V_i = \frac{nRT_0}{P} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} \iff h_0 = \frac{V_i}{S} = \frac{nRT_0}{P_0S + mg}$$

2. Pour étudier le mouvement du piston, on repère sa position avec un axe (Oz) ascendant dont l'origine est prise au niveau de la position d'équilibre (voir schéma ci-dessous) :



Le piston est soumis à son poids et aux forces de pression exercées par le gaz interne et l'atmosphère extérieure (tout frottement est négligé). On applique le PFD au piston dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_z :

$$m\ddot{z} = -mg + PS - P_0S$$

On va maintenant déterminer la relation entre la pression P dans le cylindre et l'altitude z du piston. On suppose qu'à tout instant, le gaz interne est en équilibre thermodynamique, à la température T_0 . Puisque la température et la quantité de matière se conservent au cours du mouvement (le cylindre est fermé), alors d'après la loi des gaz parfait :

$$PV = \text{Cste} \iff PV = P_i V_i = nRT_0 \iff P = \frac{nRT_0}{V} = \frac{nRT_0}{hS} = \frac{nRT_0}{(h_0+z)S} = \frac{nRT_0}{h_0S\left(1+\frac{z}{h_0}\right)} = \frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{1 + \frac{z}{h_0}}$$

Pour simplifier cette expression mathématique, on effectue un développement limité de $\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{-1}$ au premier ordre. Puisqu'on étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre, on peut faire l'hypothèse qu'à tout instant, $|z| \ll h_0$, ce qui permet d'écrire :

$$\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{z}{h_0} \iff P \simeq \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \left(1 - \frac{z}{h_0}\right)$$

On réinjecte cette expression dans le PFD :

$$m\ddot{z} = -mg + \left(P_0S + mg\right) \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) - P_0S = -\left(P_0S + mg\right) \frac{z}{h_0}$$

On réécrit cette équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{P_0S + mg}{mh_0} z = 0$$

On vient de montrer que les petites oscillations du piston autour de sa position d'équilibre sont **harmoniques**, avec une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mh_0}{P_0S + mg}}$$