Corrigé DS6

Exercice 1 : Équilibrage et dynamique d'une machine tournante

1. La machine est soumise à deux forces, son poids et la réaction de l'axe (Ox). On applique le TMC à la machine à l'équilibre par rapport à l'axe (Ox):

$$0 = \mathcal{M}_x(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_x(\vec{R})}_{=0}$$

car le bras de levier de $\vec{R}$ est nul. À l'équilibre, le moment du poids doit être nul. Cela n'est possible que si le bras de levier du poids est nul, c'est-à-dire si $\vec{P}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OG}$, autrement dit si G se trouve à la verticale de O, au-dessus (position d'équilibre instable) ou en-dessous (position d'équilibre stable). En pratique, la seule position réellement observée est la deuxième.

2. La machine est soumise à $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

3. D'après le TMC : $J_x\ddot{\theta} = \mathcal{M}_x(\vec{P}) = -mga\sin\theta$. Dans l'approximation des petites angles, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2ga}{R^2}\theta = 0}$$

La machine oscille autour de la verticale avec une période $\boxed{T = 2\pi\frac{R}{\sqrt{2ga}}}$.

4. AN : $\boxed{a = \frac{4\pi^2R^2}{2gT^2} = 0{,}1\,\text{mm}}$.

5. On applique le PFD à la machine en mouvement : $m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g} \iff \vec{R} = m\vec{a} - m\vec{g}$. Puiqsue la machine tourne à vitesse constante, le point G possède un movement circulaire uniforme de rayon a. Son accélération vaut $\vec{a} = -a\omega^2\vec{u}_r = -\omega^2\overrightarrow{OG}$.

On retrouve bien l'expression $\boxed{\vec{R} = -m\omega^2\overrightarrow{OG} - m\vec{g}}$.

6. R est maximale lorsque $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{g}$ et de même sens et $R_{\max} = m(a\omega^2 + g)$. À l'inverse, R est minimale si $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{g}$ et de sens opposé et $R_{\min} = m(a\omega^2 - g)$. Au cours du temps, la valeur moyenne de R sera $\boxed{\langle R\rangle = ma\omega^2}$.

7. AN : $\boxed{\langle R\rangle = 2{,}0.10^3\,\text{N}}$. D'après la troisième loi de Newton, la machine exerce sur l'axe la force $-\vec{R}$. Le déséquilibre de la machine entraîne des efforts considérables sur l'axe et d'autant plus que cette réaction n'est pas constante mais change à chaque instant de direction. Même un déséquilibre très faible peut provoquer des dégats importants sur l'axe si la machine tourne à des vitesses de rotation élevées. En pratique, on rééquilibre la machine avant de la mettre en rotation.

8. On utilise la formule donnée dans l'énoncé. Si le centre d'inertie du système {machine + balourd} est confondu avec O alors :

$$m\overrightarrow{OG} + m'\overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff m'\overrightarrow{OB} = -m\overrightarrow{OG}$$

où $\overrightarrow{OB}$ est la position du balourd. La seule possibilité consiste à placer le balourd diamétralement opposé au point G. Dans ce cas, on aura $m'R = ma \iff \boxed{m' = \frac{ma}{R} = 40\,\text{g}}$.

9. Pour que la machine entre en rotation, il faut que l'effort fourni par le moteur surpasse le couple résistant : $\boxed{|\Gamma_m| > |\Gamma_r|}$.

10. On applique le TMC à la machine : $J_x\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_m + \Gamma_r + \Gamma_f = \Gamma_m + \Gamma_r - \alpha\omega$

Remarque : le moment du poids est désormais nul puisque la machine est équilibrée. On obtient l'équation :

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J_x}\omega = \frac{\Gamma_m + \Gamma_r}{J_x}}$$

Cette équation différentielle est caractéristique d'un régime transitoire de temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{J_x}{\alpha}}$. Lorsque $t \to \infty$, ω tend vers $\boxed{\omega_\infty = \frac{\Gamma_m + \Gamma_r}{\alpha}}$.

11. La solution générale de l'équation s'écrit : $\omega(t) = A\exp(-t/\tau) + \omega_\infty$. Avec la CI $\omega(0) = 0$, on trouve $A = -\omega_\infty$ d'où

$$\boxed{\omega(t) = \omega_\infty\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)}$$

La vitesse angulaire tend vers l'asymptote $\omega = \omega_\infty$ de manière exponentielle.

12. La puissance délivrée par le moteur vaut $\boxed{\mathcal{P}_m = \Gamma_m\omega = 22\,\text{kW}}$. En régime permanent, la puissance délivrée par le moteur est entièrement dissipée par les frottements : $\boxed{\mathcal{P}_f = -\mathcal{P}_m = -22\,\text{kW}}$.

13. Un couple est homogène à un moment de force, c'est-à-dire au produit d'une distance et d'une force. Par conséquent, $\boxed{\text{son unité SI est le N}\cdot\text{m}}$.

Exercice 2 : Deux problèmes de statique des fluides

1. Réponse **C)**. La poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids de fluide déplacé, ici l'eau.

2. Réponses **C)** et **D)**. La poussée d'Archimède exercée par l'air est proportionnelle à la masse volumique de l'air et le poids du glaçon à la masse volumique de la glace. Puisque $\rho_{air} \ll \rho_g$ et ρ_e, on peut négliger la poussée d'Archimède exercée par l'air devant le poids du glaçon et la poussée d'Archimède exercée par l'eau.

3. Réponse **A)**. On caractérise l'équilibre mécanique du glaçon par :

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_A(\textbf{eau}) = \vec{0} \implies \rho_g V\vec{g} - \rho_e V_i\vec{g} = \vec{0} \iff \boxed{x = \frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_e}}$$

4. Réponse **D)**. La masse du glaçon vaut $m_g = \rho_g V$.

La masse d'eau liquide vaut $m_e = \rho_e(hS - V_i) = \rho_e\left(hS - \frac{\rho_g}{\rho_e}V\right) = \rho_e hS - \rho_g V$.

Par conséquent, la masse d'eau totale vaut $\boxed{m_{eau} = m_g + m_e = \rho_e hS}$.

5. Réponse **C)**. Lorsque le glaçon a totalement fondu, il reste un volume d'eau liquide $V' = h'S$. Puisque la masse totale d'eau se conserve au cours de l'expérience, on en déduit que $\rho_e h'S = \rho_e hS \iff \boxed{h = h'}$.

6. Réponse **C)** et **E)**. Dans le cas précédent, on se rend compte que le volume occupé par le glaçon fondu est égal au volume immergé du glaçon encore solide dans l'eau pure $\left(V_{\text{glaçon fondu}} = \frac{m_g}{\rho_e} = \frac{\rho_g V}{\rho_e} = V_i\right)$, ce qui explique que $\Delta h = 0$ lorsque le glaçon fond.

Désormais, l'équilibre du glaçon se traduit par $\rho_g V = \rho_a V_i$. Or le volume occupé par le glaçon fondu vaut toujours $V_{\text{glaçon fondu}} = \frac{\rho_g V}{\rho_e} < \frac{\rho_g V}{\rho_a} = V_i$. En fondant, le glaçon occupe un volume plus faible que V_i, par conséquent, **le niveau du liquide diminue lorsque le glaçon fond**. Le volume total d'eau diminue donc mais **la masse totale reste constante**.

7. Réponse **A)**. Dans l'état initial, la masse du glaçon vaut toujours $m_g = \rho_g V$. La masse de boisson vaut $m_a = \rho_a(hS - V_i) = \rho_a hS - \rho_g V$.

Dans l'état final, la masse d'eau et de boisson restant constante, on a :

$$h' = \frac{m_g}{\rho_e S} + \frac{m_a}{\rho_a S} = \frac{\rho_g V}{\rho_e S} + \frac{\rho_a hS - \rho_g V}{\rho_a S} = \frac{\rho_g V}{S}\left(\frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_a}\right) + h \Longleftrightarrow \boxed{\Delta h = \frac{\rho_g V}{S}\left(\frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_a}\right) = -0{,}5\,\text{mm}}$$

8. Réponse **C)**. La loi de pression dans l'atmosphère terrestre isotherme s'écrit sous la forme $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$. La pression diminue d'un facteur 2 sur une distance $\boxed{h = \frac{RT}{Mg}\ln 2 = 5{,}5\,\text{km}}$.

9. Réponse **D)**. Au niveau du sol, la poussée d'Archimède exercée par l'air environnant sur le ballon vaut $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{air}} V \vec{g} = -\frac{P_0 M_{\text{air}} V}{RT}\vec{g}$.

Le poids du ballon vaut $\vec{P} = (m + m')\,\vec{g} = \left(m' + \frac{P_0 M_H V}{RT}\right)\vec{g}$. Le ballon décolle du sol si la poussée d'Archimède est plus forte que le poids, c'est-à-dire si :

$$\frac{P_0 M_{\text{air}} V}{RT} > m' + \frac{P_0 M_H V}{RT} \Longleftrightarrow \boxed{V > V_0 = \frac{m' RT}{P_0\,(M_{\text{air}} - M_H)} = 42\,\text{m}^3}$$

10. Réponse **B)**. La masse de dihydrogène correspondante vaut $\boxed{m_0 = \frac{P_0 M_H V_0}{RT} = 3{,}7\,\text{kg}}$.

11. Réponse **B)** et **D)**. Au cours de l'ascension, la masse et la température du dihydrogène reste constante mais sa pression diminue. D'après l'équation d'état des gaz parfait, **son volume doit augmenter**.

La force ascensionnelle subit par le ballon est égale à $\vec{P} + \vec{\Pi}_A$. Le poids du ballon ne varie pas car la masse de dihydrogène reste constante. La poussée d'Archimède exercée par l'air à une altitude quelconque vaut $\vec{\Pi}_A = -\frac{P(z)V(z)M_{\text{air}}}{RT}\vec{g}$. Or, d'après la loi des gaz parfait, $P(z)V(z) = nRT = \text{Cste} = P_0 V$. Au cours de l'ascension, la poussée d'Archimède est elle aussi constante. Par conséquent, le ballon s'élève dans l'atmosphère **avec une accélération constante**.

12. Réponse **B)**. Le ballon éclate lorsque

$$V(z) = V_1 \Longleftrightarrow \frac{P_0 V}{P(z)} = V_1 \Longleftrightarrow \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \frac{mRT}{P_0 M_H V_1} \Longleftrightarrow \boxed{z = \frac{RT}{Mg}\ln\left(\frac{P_0 M_H V_1}{mRT}\right) = 17{,}4\,\text{km}}$$

13. Réponse **D)**. La soupape permet au dihydrogène de quitter l'enveloppe avant que celle-ci n'éclate. le ballon peut alors poursuivre son ascension. A une altitude z quelconque, la masse de dihydrogène restant dans le ballon vaut $m_H = \frac{P(z)V_1 M_H}{RT}$. Le ballon se stabilise lorsque la force ascensionnelle s'annulle, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{P(z)M_{\text{air}}V_1}{RT} = m' + \frac{P(z)V_1 M_H}{RT} \Longleftrightarrow P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = \frac{m'RT}{V_1\,(M_{\text{air}} - M_H)} \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{z = \frac{RT}{Mg}\ln\left(\frac{P_0 V_1\,(M_{air} - M_H)}{m'RT}\right) = 26{,}8\,\text{km}}$$

<u>Exercice 3</u> : Fonctionnement d'un compresseur

1. Lorsque l'on tire le piston pour la première fois, le gaz qui occupait initialement le volume V_0 de l'enceinte D à la pression P_0 sé détend pour occuper le volume $V_0 + V_{\text{M}}$ à la pression $P_{\text{R},1} = P_{\text{d},1}$. Comme la température et la quantité de matière se conservent, on peut écrire :

$$P_0 V_0 = P_{\text{R},1}(V_0 + V_{\text{M}}) \Longleftrightarrow \boxed{P_{\text{R},1} = \frac{V_0}{V_0 + V_{\text{M}}}P_0}$$

On écrit la loi des gaz parfait dans le réservoir dont le volume est V_{M} :

$$n_{\text{R},1} = \frac{P_{\text{R},1}V_{\text{M}}}{RT_0} \Longleftrightarrow \boxed{n_{\text{R},1} = \frac{P_0 V_0 V_{\text{M}}}{RT_0(V_0 + V_{\text{M}})}}$$

2. La quantité de matière initiale dans l'enceinte G vaut :

$$n_{\text{g},0} = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$$

Après avoir repoussé le piston, la quantité de matière devient égale à $n_{\text{g},0} + n_{\text{R},1}$. La pression vaut alors :

$$P_{\text{R},1} = \frac{(n_{\text{g},0} + n_{\text{R},1})RT_0}{V_0} \Longleftrightarrow \boxed{P_{\text{R},1} = P_0\left(1 + \frac{V_{\text{M}}}{V_0 + V_{\text{M}}}\right)}$$

3. On reprend le raisonnement de la question 1. Lorsque l'on tire le piston pour la N-ième fois, le gaz qui occupait initialement le volume V_0 de l'enceinte D à la pression $P_{\text{d},N}$ sé détend pour occuper le volume $V_0 + V_{\text{M}}$ à la pression $P_{\text{d},N+1}$. Comme la température et la quantité de matière se conservent, on peut écrire :

$$P_{\text{d},N}V_0 = P_{\text{d},N+1}(V_0 + V_{\text{M}}) \Longleftrightarrow \boxed{P_{\text{d},N+1} = \frac{V_0}{V_0 + V_{\text{M}}}P_{\text{d},N}}$$

Par récurrence, on montre immédiatement que :

$$\boxed{P_{\text{d},N} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_{\text{M}}}\right)^N P_0}$$

4. Par conservation de la quantité de matière en gaz :

$$n_{\text{g},N} + n_{\text{d},N} = n_{\text{g},0} + n_{\text{d},0} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} \Longrightarrow n_{\text{g},N} = \frac{2P_0 V_0}{RT_0} - n_{\text{d},N}$$

On applique la loi de gaz parfait dans l'enceinte D après N aller-retours :

$$n_{\mathrm{d},N} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_\mathrm{M}}\right)^N \frac{P_0 V_0}{R T_0}$$

On aboutit finalement à :

$$\boxed{n_{\mathrm{g},N} = \left[2 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V_\mathrm{M}}\right)^N\right] \frac{P_0 V_0}{R T_0}}$$

On applique la loi de gaz parfait dans l'enceinte G après N aller-retours :

$$P_{\mathrm{d},N} = \frac{n_{\mathrm{d},N} R T_0}{V_0} \iff \boxed{P_{\mathrm{d},N} = \left[2 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V_\mathrm{M}}\right)^N\right] P_0}$$

5. Dans la limite $N \to \infty$, $\boxed{P_{\mathrm{g},N} \to 2P_0}$ et $\boxed{P_{\mathrm{d},N} \to 0}$. On pouvait s'y attendre car après un nombre infini d'aller-retours, on vide totalement l'enceinte D pour remplir l'enceinte G. Dans cette dernière, la quantité de matière a alors doublé par rapport à l'état initial, donc la pression aussi car le volume et la température sont stationnaires.

6. Le clapet anti-retour qui sépare le réservoir de l'enceinte D ne s'ouvre que si la pression dans le réservoir devient inférieure à celle dans l'enceinte D. Il finit par ne plus s'ouvrir lorsque $P_{\mathrm{R},N+1} = P_{\mathrm{d},N}$ même lorsque le piston est tiré au maximum ($V_\mathrm{R} = V_\mathrm{M}$).

Le clapet anti-retour qui sépare le réservoir de l'enceinte G ne s'ouvre que si la pression dans le réservoir devient supérieure à celle dans l'enceinte G. Il finit par ne plus s'ouvrir lorsque $P_{\mathrm{R},N+1} = P_{\mathrm{g},N}$ même lorsque le piston est poussé au maximum ($V_\mathrm{R} = V_\mathrm{m}$).

Notons respectivement $n_{\mathrm{g},\infty}$, $n_{\mathrm{d},\infty}$ et $n_{\mathrm{R},\infty}$ les valeurs finales de la quantité de matière dans l'enceinte G, l'enceinte D et le réservoir. Elles vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{n_{\mathrm{R},\infty}}{V_\mathrm{M}} = \dfrac{n_{\mathrm{d},\infty}}{V_0} & \text{(clapet de droite ne s'ouvre plus)} \\ \dfrac{n_{\mathrm{R},\infty}}{V_\mathrm{m}} = \dfrac{n_{\mathrm{g},\infty}}{V_0} & \text{(clapet de gauche ne s'ouvre plus)} \\ n_{\mathrm{g},\infty} + n_{\mathrm{d},\infty} + n_{\mathrm{R},\infty} = \dfrac{2P_0 V_0}{R T_0} & \text{(conservation de la matière)} \end{cases}$$

La résolution de ce système aboutit à :

$$n_{\mathrm{g},\infty} = \frac{2P_0 V_0}{R T_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V_\mathrm{m}}{V_0} + \frac{V_\mathrm{m}}{V_\mathrm{M}}}$$

Une dernière loi des gaz parfaits dans l'enceinte G permet de calculer la pression maximale :

$$\boxed{P_{\mathrm{g},\infty} = \frac{2P_0}{1 + \frac{V_\mathrm{m}}{V_0} + \frac{V_\mathrm{m}}{V_\mathrm{M}}}}$$