DS de physique n° 6

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considére comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.*

Exercice 1 : Équilibrage et dynamique d'une machine tournante

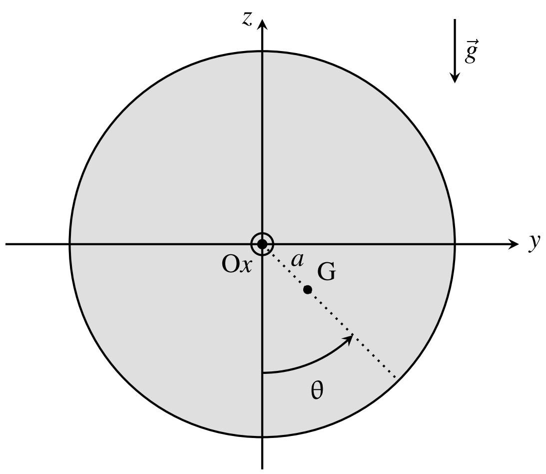


FIGURE 1 : Déséquilibre d'une machine tournante

On modélise très simplement une machine tournante par un disque de masse m et de rayon R pouvant tourner sans frottement autour d'un axe Ox horizontal passant par son centre O, supposé fixe dans le référentiel terrestre galiléen. Idéalement, ce type de machine est usiné de telle sorte que son centre d'inertie G se trouve exactement sur l'axe de rotation, en O (la machine est dite **équilibrée**). En réalité, il est fréquent que G se trouve à une distance $a \ll R$ de l'axe (voir figure 1 qui n'est pas représentée à l'échelle par souci de clarté). La machine est alors déséquilibrée.

Le champ de pesanteur vaut $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

On admet le résultat suivant : si $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ sont deux solides de masses respectives m_1 et m_2, de centres d'inertie respectifs G_1 et G_2, alors le centre d'inertie G de $\{(\mathscr{S}_1)+(\mathscr{S}_2)\}$ vérifie :

$$m_1\overrightarrow{\mathrm{GG}_1} + m_2\overrightarrow{\mathrm{GG}_2} = \overrightarrow{0}$$

Partie 1 : Recherche de la position de G

Dans un premier temps, on fait tourner la machine autour de $(\mathrm{O}x)$ jusqu'à ce qu'elle se trouve en équilibre.

1. Où peut alors se trouver le point G ? Justifier. Discuter qualitativement de la stabilité de l'équilibre dans chaque cas et expliquer quelle est la seule possibilité envisageable en pratique.

La position déterminée à la question précédente permet de définir une direction de référence par rapport à laquelle on peut mesurer la position angulaire θ de la machine autour de l'axe Ox (voir figure 1). Dans les questions suivantes, on fait l'hypothèse que a est suffisamment faible pour assimiler le moment d'inertie J_x de la machine par rapport à l'axe Ox à celui d'un disque homogène par rapport à son axe de symétrie de révolution. On prendra donc $J_x = \frac{1}{2}mR^2$.

2. Faire soigneusement le bilan des forces qui s'exercent sur la machine.

3. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement de la machine. Simplifier cette équation dans l'approximation des petits angles et exprimer la période T des petites oscillations en fonction de R, g et a.

4. AN : Sachant que $R = 50\,\text{cm}$ et $T = 71\,\text{s}$, calculer a.

Partie 2 : Équilibrage de la machine

Un moteur non représenté sur le schéma permet de mettre en mouvement la machine à la vitesse angulaire $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ constante. On désigne par $\vec{R}$ la réaction exercée par l'axe Ox sur la machine.

5. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la réaction de l'axe s'écrit sous la forme :

$$\vec{R} = -m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OG}} - m\vec{g}$$

6. On se place dans le cas où $a\omega^2 > g$. Exprimer les valeurs extrèmes de $R = \left\|\vec{R}\right\|$ au cours du temps puis sa moyenne temporelle $\langle R \rangle$.

7. AN : calculer $\langle R \rangle$ sachant que la machine tourne à 3000 tours/min et que $m = 200\,\text{kg}$. Conclure quand à l'effet du déséquilibre sur le mouvement de rotation de la machine.

On équilibre la machine en plaçant un **balourd**, c'est-à-dire une masse ponctuelle m', sur la circonférence de la machine de sorte que le centre d'inertie du système {machine + balourd} soit confondu avec le point O.

8. Expliquer en détail la position dans laquelle il faut placer le balourd et la valeur de m' qu'il faut choisir. Faire l'application numérique.

Dans toute la suite du problème, la machine est supposée équilibrée.

Partie 3 : Mise en mouvement de la machine

La machine est mise en mouvement par un couple moteur Γ_m et fait tourner une charge, ce qui produit un couple résistant Γ_r. Lors d'une mise en route, ces deux couples sont supposés indépendants du temps et tels que $\Gamma_\mathrm{m} > 0$ et $\Gamma_\mathrm{r} < 0$. Se rajoutent à cela des frottements visqueux qui exercent un couple de frottement $\Gamma_\mathrm{f} = -\alpha\dot{\theta}$.

9. À quelle condition sur Γ_m et Γ_r la machine peut-elle effectivement entrer en rotation ?

10. Établir l'équation du mouvement de la machine. On introduira un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de J_x et α. Montrer que la vitesse angulaire ω tend vers une valeur asymptotique ω_∞ que l'on exprimera en fonction de Γ_m, Γ_r et α.

11. Sachant qu'on exerce le couple Γ_m à partir de la date $t = 0$ et qu'à cet instant la machine est immobile, exprimer $\omega(t)$ et tracer son graphe.

12. AN : À vide (c'est-à-dire sans charge), la machine tourne en régime stationnaire à 3000 tours/min lorsqu'on lui impose un couple $\Gamma_\mathrm{m} = 70\,\text{SI}$. Calculer la puissance délivrée par le moteur qui entraîne la machine et la puissance dissipée par frottements.

13. Quelle est l'unité SI d'un couple ?

a) $\mathrm{N \cdot kg}$ b) $\mathrm{N \cdot m}$ c) $\mathrm{N \cdot s}$ d) N

Justifier votre choix.

Exercice 2 : Deux problèmes de statique des fluides

Cet exercice se présente sous la forme d'un QCM. Les réponses devront être retranscrites dans votre copie et devront être argumentées et justifiées, éventuellement par un calcul si cela est nécessaire. La notation tiendra en grande partie compte de la qualité et de la rigueur des démonstrations. Il est possible qu'une question possède plusieurs réponses justes. Chaque question possède au moins une réponse juste.

Premier problème : équilibre et fonte d'un glaçon flottant

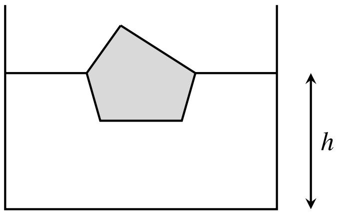


FIGURE 1

Un verre cylindrique de section $S = 30\,\mathrm{cm}^2$ est rempli avec de l'eau liquide de masse volumique $\rho_e = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ dans lequel est plongé un glaçon, de volume $V = 80\,\mathrm{cm}^3$, de masse volumique $\rho_g = 917\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, constitué de la même eau. On note $h = 10\,\mathrm{cm}$ la hauteur d'eau liquide initiale dans le verre. Si l'on attend suffisamment longtemps, le glaçon fond et on note h' la nouvelle hauteur d'eau dans le verre. On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre et V_i le volume de glace immergé dans l'eau.

Question 1 :

La poussée d'Archimède exercée par l'eau sur le glaçon vaut :

A) $\vec{\Pi}_A = -\rho_e h S \vec{g}$	**B)** $\vec{\Pi}_A = -\rho_g V \vec{g}$
C) $\vec{\Pi}_A = -\rho_e V_i \vec{g}$	**D)** $\vec{\Pi}_A = -\rho_g V_i \vec{g}$

Question 2 :

La poussée d'Archimède exercée par l'air sur le glaçon :

A) est nulle.

B) est de même ordre de grandeur que celle exercée par l'eau sur le glaçon.

C) est négligeable devant celle exercée par l'eau sur le glaçon.

D) est négligeable devant le poids du glaçon.

Question 3 :

La fraction volumique du glaçon immergée dans l'eau s'exprime sous la forme :

A) $x = \dfrac{\rho_g}{\rho_e}$	**B)** $x = \dfrac{\rho_e}{\rho_e + \rho_g}$
C) $x = 1 - \dfrac{\rho_g}{\rho_e}$	**D)** $x = \dfrac{\rho_g}{\rho_e + \rho_g}$

Question 4 :

La masse totale d'eau (eau liquide + glaçon) à l'intérieur du verre est donnée par la relation :

A) $m_{\text{eau}} = \rho_e hS + \rho_g V$

B) $m_{\text{eau}} = (\rho_e + \rho_g)\, hS$

C) $m_{\text{eau}} = \rho_e\,(hS + V)$

D) $m_{\text{eau}} = \rho_e hS$

Question 5 :

On note $\Delta h = h' - h$ la variation du niveau d'eau due à la fonte du glaçon. Cette variation vaut:

A) $\Delta h = -0,5\,\text{mm}$

B) $\Delta h = -0,2\,\text{mm}$

C) $\Delta h = 0$

D) $\Delta h = 0,3\,\text{mm}$

Question 6 :

Dans les deux questions qui suivent, on suppose que le glaçon d'eau douce fond dans un volume de boisson légèrement alcoolisée de masse volumique $\rho_a = 980\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. La proposition suivante est vérifiée :

A) Le niveau du liquide ne varie pas lorsque le glaçon fond.

B) Le niveau du liquide s'élève lorsque le glaçon fond.

C) Le niveau du liquide s'abaisse lorsque le glaçon fond.

D) Le volume total occupé par le liquide et le glaçon se conserve lorsque le glaçon fond.

E) La masse totale du liquide et du glaçon se conserve lorsque le glaçon fond.

Question 7 :

On note $\Delta h = h' - h$ la variation du niveau de liquide due à la fonte du glaçon. Cette variation vaut:

A) $\Delta h = -0,5\,\text{mm}$

B) $\Delta h = -0,2\,\text{mm}$

C) $\Delta h = 0$

D) $\Delta h = 0,3\,\text{mm}$

Deuxième problème : envol d'un ballon atmosphérique

Un ballon-sonde sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon est **fermée** et contient une masse m de dihydrogène, assimilé à un gaz parfait. Elle est élastique, ce qui implique que son volume V peut varier au cours de l'ascension.

L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait en équilibre isotherme à la température $T_0 = 273\,\mathrm{K}$. On suppose que l'équilibre mécanique et thermique de l'enveloppe est réalisé à tout instant et que cela implique que la pression et la température interne du ballon sont égales à la pression et la température de l'air extérieur. On suppose enfin que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme.

Données numériques :

Masse molaire de l'air :	$M_{air} = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
Masse molaire du dihydrogène :	$M_H = 2{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
Pression atmosphérique au niveau du sol :	$P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$
Masse de l'enveloppe et de la charge du ballon :	$m' = 50\,\mathrm{kg}$
Champ de pesanteur terrestre :	$g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
Volume maximal de l'enveloppe :	$V_1 = 1{,}2\times10^3\,\mathrm{m^3}$

Question 8 :

La pression atmosphérique diminue de moitié lorsque l'on s'élève de :

A) $500\,\mathrm{m}$

B) $2{,}5\,\mathrm{km}$

C) $5{,}5\,\mathrm{km}$

D) $8{,}0\,\mathrm{km}$

Question 9 :

Le ballon décolle à condition que le volume de l'enveloppe soit supérieur ou égal à :

A) $V_0 = 5{,}3\,\mathrm{m^3}$

B) $V_0 = 12\,\mathrm{m^3}$

C) $V_0 = 30\,\mathrm{m^3}$

D) $V_0 = 42\,\mathrm{m^3}$

Question 10 :

Cela correspond à une masse de dihydrogène minimale égale à :

A) $m_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$

B) $m_0 = 3{,}7\,\mathrm{kg}$

C) $m_0 = 5{,}6\,\mathrm{kg}$

D) $m_0 = 8{,}9\,\mathrm{kg}$

Question 11 :

On considère que le ballon renferme une masse $m = 12\,\mathrm{kg}$ de dihydrogène. La proposition suivante est vérifiée :

A) Le ballon peut plafonner à une altitude z_1.

B) Le volume du ballon augmente au cours de l'acsenscion.

C) Le volume du ballon diminue au cours de l'ascension.

D) Le ballon s'élève avec une accélération constante.

E) Le ballon s'élève avec une vitesse constante.

Question 12 :

Le volume du ballon ne peut dépasser V_1 sans que celui-ci n'éclate. Cela se produit à une altitude :

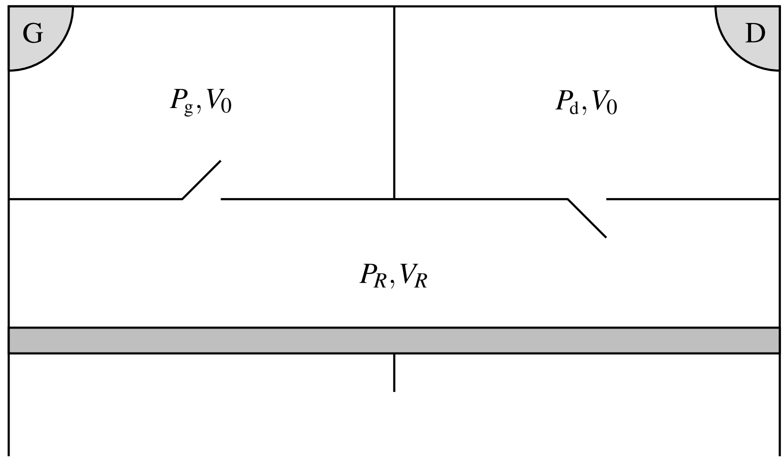
A) $z_1 = 15,6\,\mathrm{km}$	**B)** $z_1 = 17,4\,\mathrm{km}$
C) $z_1 = 19,8\,\mathrm{km}$	**D)** $z_1 = 26,8\,\mathrm{km}$

Question 13 :

Pour éviter que le ballon n'éclate, ce dernier possède une soupape qui lui permet, à partir de l'altitude z_1, d'évacuer du gaz à volume V_1 constant. Le ballon plafonne alors à l'altitude :

A) $z_2 = 15,6\,\mathrm{km}$	**B)** $z_2 = 17,4\,\mathrm{km}$
C) $z_2 = 19,8\,\mathrm{km}$	**D)** $z_2 = 26,8\,\mathrm{km}$

Exercice 3 : Fonctionnement d'un compresseur



Un compresseur est un dispositif permettant d'augmenter la pression d'un fluide (une pompe à vélo en est un exemple simple). On a représenté ci-dessus un compresseur permettant de remplir d'air l'enceinte G de volume V_0 fixe en le prélevant dans l'enceinte D de même volume V_0 fixe. L'air circule de l'une à l'autre de ces enceintes en passant dans un réservoir dont le volume V_R varie sous l'effet du déplacement d'un piston. Le volume minimal du réservoir est supposé nul et son volume maximal vaut V_M. Des clapets anti-retour permettent d'imposer le déplacement de l'air dans le sens enceinte D $\longrightarrow$ réservoir $\longrightarrow$ enceinte G. Le piston est parfaitement étanche, toutes les parois sont diathermes et les transformations successives sont supposées suffisament lentes pour que la température de l'air soit partout, à tout moment, égale à la température atmosphérique T_0. On note respectivement $P_{g,N}$ et $P_{d,N}$ la pression qui règne dans l'enceinte G et l'enceinte D après N aller-retours du piston.

Dans l'état initial $P_{g,0} = P_{d,0} = P_0$ et $V_R = 0$. L'air est assimilé à un gaz parfait.

1. On tire une première fois le piston pour augmenter le volume du réservoir jusqu'à V_M. Déterminer la pression $P_{R,1}$ qui règne alors dans le réservoir en fonction de P_0, V_0 et V_M. En déduire la quantité de matière n_{R1} qui a été extraite de l'enceinte 2 après ce premier mouvement du piston.

2. On repousse le piston jusqu'à ce que le volume du réservoir soit à nouveau nul. Exprimer la pression $P_{g,1}$ dans l'enceinte 1 après le premier aller-retour du piston.

3. Déterminer une relation entre $P_{d,N+1}$ et $P_{d,N}$. En déduire l'expression générale de $P_{d,N}$ pour N quelconque.

4. Déterminer la quantité de matière $n_{g,N}$ dans l'enceinte G après N aller-retours du piston. En déduire l'expression générale de $P_{g,N}$ pour N quelconque.

5. Vers quelles valeurs tendent $P_{g,N}$ et $P_{d,N}$ dans la limite $N \to \infty$? Pouvait-on s'y attendre ?

6. Désormais, on suppose que le volume minimal du réservoir, noté V_m (volume "nuisible"), n'est pas nul. Déterminer la pression maximale que l'on peut espérer atteindre dans l'einceinte G.