

DS de physique n° 6

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et les résultats soulignés ou encadrés. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : Chute d'arbres

A. — Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 4(a).

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe $(O, \hat{u}_y)$ dirigé par le vecteur $\hat{u}_y = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1 \hat{u}_x + N_1 \hat{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2 \hat{u}_x + N_2 \hat{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note $\vec{F}$ la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de $(O, \hat{u}_y)$ et on note α l'angle (positif) entre $\vec{BO}$ et $\vec{BC}$.

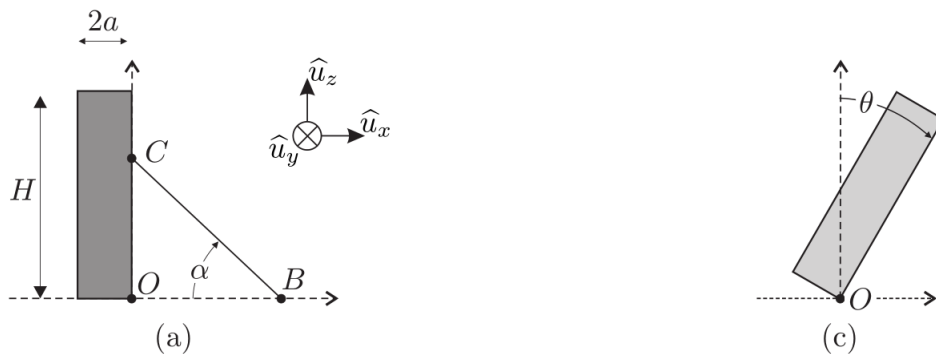


FIGURE 4 – Chute d'un arbre

- 1 — Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale $F_{\max}$ de F en fonction de f , m , g et α .
- 2 — L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .
- 3 — Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_y)$ dans la situation initiale décrite par la figure 4(a).

❑ 4 — Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_y)$ exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe $(O, \hat{u}_y)$?

❑ 5 — En supposant F constant, justifier (avec ou sans calculs, mais rigoureusement) qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .

On suppose que, quel que soit l'angle α , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement : F prend la valeur $F_{\max}$.

❑ 6 — Montrer que le moment Γ_B par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_y)$ exercé par le bûcheron via le câble s'écrit $\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\phi(\alpha)}$ avec $\phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$. En déduire l'expression de α_m en fonction de f . Vérifier que $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ pour $f = 1$.

❑ 7 — On donne $g = 1 \cdot 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $M = 1 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $H = 20 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $m = 1 \cdot 10^2 \text{ kg}$ et $f = 1$. Calculer la force $F_{\max}$ et la longueur de corde ℓ nécessaires pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe $(O, \hat{u}_y)$, repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{OC}$ avec $(O, \hat{u}_z)$.

❑ 8 — Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'arbre en fonction de M , g , H , a et θ . Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. À partir de quel angle θ_s peut-il lâcher le câble ?

B. — Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H , sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent.

On note Γ_v le moment total des actions du vent par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_y)$. Dans toute la suite, on suppose que le vent souffle avec une vitesse constante et on omet la dépendance de Γ_v en θ car celui-ci reste inférieur à 10° . Par conséquent, on supposera que Γ_v reste constant au cours du mouvement de l'arbre.

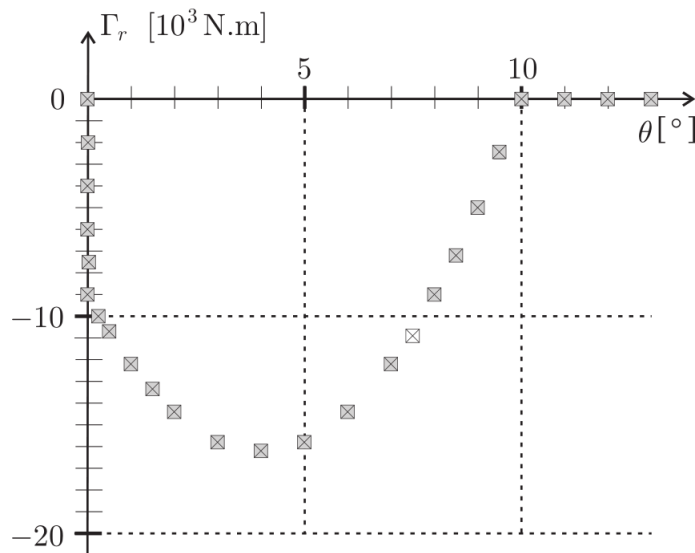


FIGURE 5 — Mesures du moment résistant. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_y)$, qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc. Des essais de traction via un câble comme dans la partie A ont permis de relever les variations de Γ_r (en 10^3 N.m) en fonction de θ (en degrés) de la figure 5 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0_+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$. Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(\beta + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 < 0$$

❑ 9 — Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et β afin qu'ils rendent compte des mesures de la figure 5 ? Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de θ_m/θ_c et Γ_m/Γ_0 issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe $(O, \hat{u}_y)$ avec un moment d'inertie J , soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation (2). Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$ en présence d'un vent de vitesse indépendante du temps et on s'interroge sur son évolution. On définit le paramètre $p = \Gamma_v / |\Gamma_0|$.

□ **10** — Discuter *graphiquement* selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ? Discuter *graphiquement* selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e \neq 0$. Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

□ **11** — Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre se met sous la forme :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta \left(p - 1 - 2u + \frac{5}{3} u^2 \right)$$

où la variable réduite u et le paramètre p sont définis par $u = \theta / \theta_c$ et $p = \Gamma_v / |\Gamma_0|$. En déduire, en précisant soigneusement le raisonnement adopté, la valeur minimale p_c de p permettant au vent de déraciner l'arbre.

On se place désormais dans le cas $p = \frac{4}{3}$.

□ **12** — Déterminer les bornes du mouvement de l'arbre. En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

Exercice 2 : Équilibre et stabilité de l'atmosphère

Nous allons étudier la stabilité de l'atmosphère et son rôle dans la forme des nuages. L'échelle considérée permet de négliger la courbure de la Terre, on suppose donc que la surface de la Terre est plane. On introduit une base de coordonnées cartésiennes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, dont l'axe des z est vertical ascendant.

Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est supposé uniforme.

Les différentes grandeurs physiques qui caractérisent l'air ne dépendent que de l'altitude z .

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , constitué de 20% de dioxygène et de 80% de diazote.

À la surface de la Terre ($z = 0$) la pression de l'air est notée P_0 et sa température T_0 .

A – Équilibre de l'atmosphère isotherme

On suppose la température uniforme, égale à T_0 , dans toute l'atmosphère.

1. En étudiant l'équilibre d'un petit cylindre de surface de base S , d'axe (Oz) , situé entre les plans de cote z et $z + dz$, établir l'équation différentielle vérifiée par la pression $P(z)$, en fonction de g , M , R et $T(z)$.
2. Montrer que la pression varie en fonction de l'altitude selon la loi

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

où H est à exprimer en fonction de M , g , R et T_0 .

3. Quelle est la dimension de H ?
4. Calculer la masse molaire de l'air.
5. Calculer la valeur numérique de H pour une atmosphère à 0°C . Commenter la valeur obtenue.

B – Équilibre de l'atmosphère adiabatique

On envisage maintenant l'air en évolution adiabatique réversible. On admet que dans un tel modèle la quantité $P(z)^{1-\gamma}T(z)^\gamma$, où $\gamma = 1,4$ est un coefficient sans dimension caractéristique de l'air, est indépendante de z .

6. On définit le gradient de température adiabatique réversible dans l'atmosphère par $\Gamma_a = -\frac{dT}{dz}$. Montrer que

$$\Gamma_a = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}$$

7. Effectuer l'application numérique. Commenter.

8. En déduire la loi d'évolution de la température de l'atmosphère en fonction de l'altitude z .

9. En déduire l'expression de la pression en fonction de z .

10. Ce modèle vous semble-t-il réaliste pour toute l'atmosphère ?

C – Stabilité

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, on suppose maintenant que l'atmosphère est en équilibre hydrostatique mais à priori non isotherme. On définit, comme précédemment, le gradient de température $\Gamma = -\frac{dT}{dz}$.

11. Que vaut Γ pour un équilibre isotherme ? pour un équilibre adiabatique réversible ?

On isole par la pensée un petit volume fermé d'air que l'on appellera *particule de fluide*. On note $T_p(z)$ sa température, $\rho_p(z)$ sa masse volumique et $\delta V_p(z)$ son volume à l'altitude z .

À l'altitude z_0 , il est à la même température $T(z_0)$ et sous la même pression $P(z_0)$ que l'air environnant.

À la suite d'une perturbation, la particule de fluide se trouve à l'altitude $z_0 + \delta z$. L'évolution est suffisamment rapide pour qu'elle puisse être supposée adiabatique réversible. La particule de fluide se retrouve donc à l'altitude $z_0 + \delta z$ à la température $T_p(z_0 + \delta z)$, différente de la température $T(z_0 + \delta z)$ de l'air environnant. En revanche, sa pression est la même que celle de l'air environnant.

12. Justifier cette dernière hypothèse.

13. Montrer que la résultante des forces qui agissent sur la particule de fluide située à l'altitude z peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = \delta V_p(z) (\rho(z) - \rho_p(z)) g \vec{u}_z$$

où $\rho(z)$ est la masse volumique de l'air environnant.

14. En déduire, à l'aide d'un développement au premier ordre, l'équation du mouvement de la particule de fluide, que l'on mettra sous la forme

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \kappa \delta z = 0$$

où κ est à exprimer en fonction de $\Gamma(z_0)$, $\Gamma_a(z_0)$, g et $T(z_0)$.

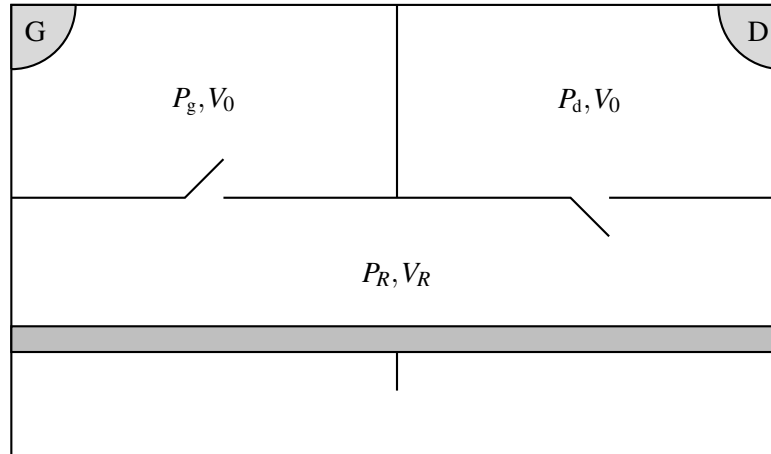
15. À quelle condition l'atmosphère est-elle stable ?

16. Montrer qu'une atmosphère isotherme est stable.

17. Quelle est la forme des nuages dans une atmosphère stable ? dans une atmosphère instable ?

Données : constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, masses molaires (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) ; C : 12 ; N : 14 ; O : 16.

Exercice 3 : Fonctionnement d'un compresseur



Un compresseur est un dispositif permettant d'augmenter la pression d'un fluide (une pompe à vélo en est un exemple simple). On a représenté ci-dessus un compresseur permettant de remplir d'air l'enceinte G de volume V_0 fixe en le prélevant dans l'enceinte D de même volume V_0 fixe. L'air circule de l'une à l'autre de ces enceintes en passant dans un réservoir dont le volume V_R varie sous l'effet du déplacement d'un piston. Le volume minimal du réservoir est supposé nul et son volume maximal vaut V_M . Des clapets anti-retour permettent d'imposer le déplacement de l'air dans le sens enceinte D $\rightarrow$ réservoir $\rightarrow$ enceinte G. Le piston est parfaitement étanche, toutes les parois sont diathermes et les transformations successives sont supposées suffisamment lentes pour que la température de l'air soit partout, à tout moment, égale à la température atmosphérique T_0 . On note respectivement $P_{g,N}$ et $P_{d,N}$ la pression qui règne dans l'enceinte G et l'enceinte D après N aller-retours du piston.

Dans l'état initial $P_{g,0} = P_{d,0} = P_0$ et $V_R = 0$. L'air est assimilé à un gaz parfait.

1. On tire une première fois le piston pour augmenter le volume du réservoir jusqu'à V_M . Déterminer la pression $P_{R,1}$ qui règne alors dans le réservoir en fonction de P_0 , V_0 et V_M . En déduire la quantité de matière $n_{R,1}$ qui a été extraite de l'enceinte 2 après ce premier mouvement du piston.
2. On repousse le piston jusqu'à ce que le volume du réservoir soit à nouveau nul. Exprimer la pression $P_{g,1}$ dans l'enceinte 1 après le premier aller-retour du piston.
3. Déterminer une relation entre $P_{d,N+1}$ et $P_{d,N}$. En déduire l'expression générale de $P_{d,N}$ pour N quelconque.
4. Déterminer la quantité de matière $n_{g,N}$ dans l'enceinte G après N aller-retours du piston. En déduire l'expression générale de $P_{g,N}$ pour N quelconque.
5. Vers quelles valeurs tendent $P_{g,N}$ et $P_{d,N}$ dans la limite $N \rightarrow \infty$? Pouvait-on s'y attendre ?
6. Désormais, on suppose que le volume minimal du réservoir, noté V_m (volume "nuisible"), n'est pas nul. Déterminer la pression maximale que l'on peut espérer atteindre dans l'enceinte G.