

Fiche d'exercices : Intégration

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx ; \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx ; \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx ; \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} ; \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{1+2x^2}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x} ; \int_1^e \frac{dx}{x+x \ln^2 x} ; \int_a^b [x] dx \ (a, b \in \mathbb{Z}) ; \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx ; \int_0^1 \frac{dx}{x-i}$$

Exercice 2 Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$.

Exercice 3 Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$ à l'aide du changement de variable $y = \frac{\pi}{4} - x$.

Exercice 4 Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\int_0^\pi |\sin(nt)| dt$.

Exercice 5 Calculer les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$ des expressions suivantes :

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sin \frac{k}{n}$	3. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$	5. $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$	4. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$	6. $\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}$

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{1/n} f(x) dx.$$

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 8 (Formule de la moyenne) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

Exercice 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. En considérant $\int_a^b (f - \lambda g)^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 10 (Intégrale de Poisson) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculer $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$ à l'aide des sommes de Riemann.

Exercice 11 (Inégalité de Jensen) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. À l'aide des sommes de Riemann, montrer que $\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx$.

Exercice 12 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0$:

- 1) Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.
- 2) Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- 3) Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$.

Exercice 13 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Soit $T = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

- 1) Montrer que $\int_a^b f(x) dx = T + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx$.
- 2) En déduire que $\left| \int_a^b f(x) dx - T \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$ où $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Exercice 14 Calculer $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ pour tout entier naturel n .

Exercice 15 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ de deux manières différentes et en déduire une formule.

Exercice 16 Étudier la suite (I_n) où $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

Exercice 17 Étudier la suite (I_n) où $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ (pour avoir un équivalent, on pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x > -1$).

Exercice 18 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$: ensemble de définition, parité, variations, limites, DL en 0, courbe représentative.

Exercice 19 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

Exercice 20 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

Exercice 21 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1-t} dt$.

Exercice 22 Calculer $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t} dt$.

Exercice 23 À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, calculer une valeur approchée à 10^{-10} près de $\ln 1,01$.

Exercice 24 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.