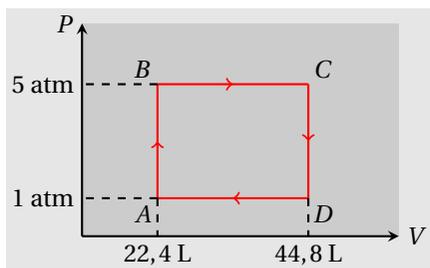


TD23 : Premier principe - corrigé

★ Exercice 1 : Cycle parcouru par un gaz parfait

1. On représente le cycle sur le diagramme de Clapeyron ci-dessous.



2. a) On utilise la loi des gaz parfait dans chaque état d'équilibre, avec $n = 1$ mol :

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 273 \text{ K} \quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 1365 \text{ K} \quad T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 2730 \text{ K} \quad T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 546 \text{ K}$$

2. b) On applique le premier principe sur le cycle entier. Puisque l'énergie interne est une fonction d'état alors sa variation est nulle sur un cycle :

$$W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = 0$$

W_{cycle} est égal, en valeur absolue, à l'aire sous la courbe, facile à déterminer ici puisque le cycle est rectangulaire. Le cycle est parcouru dans le sens horaire donc il est **moteur**, par conséquent : $W_{\text{cycle}} < 0$. On en déduit que :

$$W_{\text{cycle}} = -(P_B - P_A)(V_C - V_A) \iff Q_{\text{cycle}} = (P_B - P_A)(V_C - V_A) = 9,1 \text{ kJ}$$

Remarque : bien sûr, il est également possible de sommer les chaleurs reçues sur chaque transformation du cycle :

$$Q_{\text{cycle}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

AB et CD sont isochores donc $Q = \Delta U = C_V \Delta T$. BC et DA sont isobares donc $Q = \Delta H = C_P \Delta T$. Enfin, le gaz est monoatomique donc $C_V = \frac{3}{2} nR$ et $C_P = \frac{5}{2} nR$. Finalement, il vient :

$$Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta U_{CD} + \Delta H_{DA}$$

$$Q_{\text{cycle}} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) + \frac{5}{2} nR(T_C - T_B) + \frac{3}{2} nR(T_D - T_C) + \frac{5}{2} nR(T_A - T_D) = 9,1 \text{ kJ}$$

La première méthode, qui consiste à passer par le calcul de W_{cycle} , permet d'aller plus vite. Elle est particulièrement intéressante lorsque le travail des forces de pression sur le cycle est rapide à calculer, comme ici car le cycle a une forme simple sur le diagramme de Clapeyron.

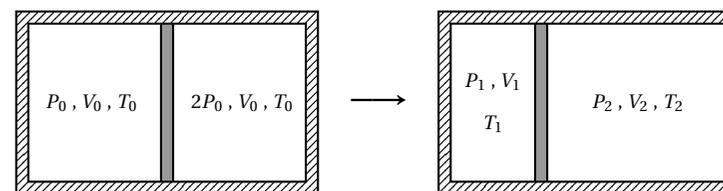
2. c) Le système est un gaz parfait donc $\Delta U = C_V \Delta T$.

$$U_C - U_A = C_V(T_C - T_A) = \frac{3}{2} nR(T_C - T_A) = 30,6 \text{ kJ}$$

2. d) La transformation BC est isobare donc :

$$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P(T_C - T_B) = \frac{5}{2} nR(T_C - T_B) = 28,4 \text{ kJ}$$

★ Exercice 2 : Transformation en vase clos



On note respectivement (P_1, V_1, T_1) et (P_2, V_2, T_2) les variables d'état dans l'état d'équilibre final, dans l'enceinte de gauche et celle de droite. Comme on commence à y être habitué désormais, on va commencer par chercher 6 relations entre ces 6 inconnues pour obtenir un système qui permettra de les déterminer toutes.

Chaque enceinte est fermée hermétiquement (n se conserve) et contient un gaz parfait :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{2P_0 V_0}{T_0} \quad (2)$$

Dans l'état d'équilibre final, le piston est en équilibre mécanique : $P_1 = P_2$ (3). Par la suite, on notera P_f cette pression finale.

Le piston est diatherme donc $T_1 = T_2$ (4). Par la suite, on notera T_f cette température finale.

Le cylindre est indéformable : $V_1 + V_2 = 2V_0$ (5).

On applique le premier principe au système {gaz 1 + gaz 2} au cours de cette transformation. Ce système est isolé car le cylindre est calorifugé ($Q = 0$) et indéformable ($W = 0$) :

$$0 = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 \iff C_{V1}(T_1 - T_0) + C_{V2}(T_2 - T_0) = 0 \quad (6)$$

À partir de (4) et (6), on obtient :

$$(C_{V1} + C_{V2})(T_f - T_0) = 0 \iff T_f = T_0 = 300 \text{ K}$$

À partir de (1) et (2), on obtient :

$$V_1 = \frac{P_0 V_0}{P_f} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{2P_0 V_0}{P_f} \quad \text{d'où} \quad V_2 = 2V_1$$

TD23 : Premier principe - corrigé

En injectant ce résultat dans (5), on trouve que :

$$V_1 = \frac{2}{3}V_0 = 0,67\text{L} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{4}{3}V_0 = 1,33\text{L}$$

Enfin, on détermine la pression finale :

$$P_f = \frac{P_0 V_0}{V_1} = \frac{3}{2}P_0 = 1,5\text{bar}$$

Au cours de cette transformation, la température de l'air s'est conservée dans chacune des deux enceintes, donc :

$$\Delta H_{\text{air}} = 0$$

★ Exercice 3 : Travail et chaleur reçus par un gaz parfait entre deux états extrêmes identiques

1. La transformation AIB est isotherme et le système est un gaz parfait :

$$W_{AIB} = nRT \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) = 4,0\text{kJ}$$

Au cours de cette transformation, d'après le premier principe :

$$W_{AIB} + Q_{AIB} = 0 \iff Q_{AIB} = -W_{AIB} = -4,0\text{kJ}$$

2. La transformation AE est isochore donc $W_{AE} = 0$. La transformation EB est isobare :

$$W_{AEB} = W_{EB} = -\Delta_{EB}(PV) = p_f(V_A - V_B)$$

En utilisant la loi des gaz parfaits en A et E , on aboutit à :

$$W_{AEB} = nR p_f \left(\frac{T_i}{p_i} - \frac{T_f}{p_f}\right) = nRT_f \left(\frac{p_f}{p_i} - 1\right) = 10\text{kJ}$$

Au cours de cette transformation, on a toujours $\Delta U = 0$ (car $T_f = T_i$) :

$$W_{AEB} + Q_{AEB} = 0 \iff Q_{AEB} = -W_{AEB} = -10\text{kJ}$$

★★ Exercice 4 : Compressions d'un gaz parfait

1. Dans l'état final, le piston est en équilibre mécanique donc $P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S} = 1,1\text{bar}$. Comme la quantité de matière et la température du gaz se conservent au cours de la transformation, on peut écrire :

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

avec $P_1 = P_0$ (équilibre mécanique du piston dans l'état initial), $V_1 = h_1 S$ et $V_2 = h_2 S$.

$$h_2 = \frac{h_1}{1 + \frac{Mg}{P_0 S}} = 91\text{cm}$$

On détermine le travail des forces de pression de manière intégrale :

$$W = - \int_1^2 P_{\text{ext}} dV$$

avec $P_{\text{ext}} = c^{\text{te}} = P_0 + \frac{Mg}{S}$.

$$W = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) (V_2 - V_1) = - (P_0 S + Mg) (h_2 - h_1)$$

avec $h_2 - h_1 = h_1 \left(\frac{1}{1 + \frac{Mg}{P_0 S}} - 1\right) = -\frac{Mg h_1}{P_0 S + Mg}$.

$$W = mgh_1 = 1\text{kJ}$$

Remarque : bien que $P_{\text{ext}} = c^{\text{te}}$, la transformation n'est pas monobare car $P_1 \neq P_2$. En revanche, elle est **monotherme**.

2. L'état final est identique à celui de la première question. En effet, la pression finale est la même (équilibre méca du piston de masse M) et la température aussi, donc les volumes sont également les mêmes.

La transformation est à la fois monotherme et lente. On peut l'assimiler à une transformation **isotherme**. Le travail des forces de pression vaut :

$$W = nRT_0 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = P_0 S h_1 \ln\left(1 + \frac{Mg}{P_0 S}\right) = 953\text{J}$$

Les deux transformations étudiées dans cet exercice illustrent le fait que le travail des forces de pression entre deux états d'équilibre **dépend du chemin suivi**.

TD23 : Premier principe - corrigé

★★ Exercice 5 : Détente adiabatique d'un GP monoatomique

1. Dans l'état initial, l'équilibre mécanique du piston et de la masse M impose que : $p_i = p_0 + \frac{(M+m_p)g}{S}$ avec $S = \frac{V_i}{h_i} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. On en déduit que :

$$M = \frac{(p_i - p_0)S}{g} - m_p = 3 \text{ kg}$$

L'équilibre mécanique du piston dans l'état final impose $p_f = p_0 + \frac{m_p g}{S} = 1,05 \text{ bar}$.

2. On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz au cours de cette transformation :

$$\Delta U = W + Q$$

avec $Q = 0$ car la transformation est adiabatique. On calcule ci-dessous le travail des forces de pression, en considérant que la pression extérieure se conserve au cours de la transformation : $p_{\text{ext}} = p_0 + \frac{m_p g}{S} = p_f$:

$$W = - \int p_{\text{ext}} dV = -p_f (V_f - V_i)$$

Enfin, $\Delta U = \frac{3}{2} nR (T_f - T_i)$ car le GP est monoatomique. Le premier principe s'écrit donc :

$$\frac{3}{2} nR (T_f - T_i) = -p_f (V_f - V_i)$$

Il reste deux inconnues, T_f et V_f . On utilise la loi des gaz parfaits à l'état initial et l'état final :

$$nRT_f = p_f V_f \quad \text{et} \quad nRT_i = p_i V_i$$

Ce qui permet d'obtenir une équation dans laquelle V_f est la seule inconnue :

$$\frac{3}{2} (p_f V_f - p_i V_i) = -p_f (V_f - V_i) \iff \frac{3}{2} \left(\frac{p_f}{p_i} \cdot \frac{V_f}{V_i} - 1 \right) = - \frac{p_f}{p_i} \left(\frac{V_f}{V_i} - 1 \right) \iff \frac{5}{2} \cdot \frac{p_f}{p_i} \cdot \frac{V_f}{V_i} = \frac{p_f}{p_i} + \frac{3}{2}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{p_i}{p_f} = 1,09$$

On en déduit que :

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{p_f V_f}{p_i V_i} = 0,95$$

Le travail reçu par le gaz au cours de cette transformation vaut :

$$W = -p_f (V_f - V_i) = -p_f V_i \left(\frac{V_f}{V_i} - 1 \right) = -9,0 \text{ J}$$

★★ Exercice 6 : Mesurage d'une capacité thermique massique

1. À partir d'un bilan d'énergie, nous allons établir la loi horaire donnant la température $T(t)$ du liquide. On applique le premier principe au système {liquide + calorimètre} entre la date $t = 0$ (début du chauffage) et une date t quelconque. La transformation, qui a lieu dans un calorimètre, peut-être supposée isobare, comme nous l'avons vu en cours.

$$\Delta H = \Delta H_{\text{liq}} + \Delta H_{\text{calo}} = Q$$

où $Q = RI^2 t$ est la chaleur dégagée par effet Joule par la résistance au cours de cette transformation de durée égale à t . Le liquide peut être assimilé à une phase condensée incompressible et indilatable donc $\Delta H_{\text{liq}} = mc (T(t) - T_0)$. Pour le calorimètre, par définition de la masse en eau : $\Delta H_{\text{calo}} = \mu c_\ell (T(t) - T_0)$.

$$(mc + \mu c_\ell) (T(t) - T_0) = RI^2 t \iff T(t) = T_0 + \frac{RI^2}{mc + \mu c_\ell} t$$

2. La température est, en théorie, une fonction affine du temps. On vérifie la validité de ce modèle en traçant le graphe $T(t)$ à partir des valeurs obtenues expérimentalement. On effectue ensuite la régression linéaire avec le modèle : $T(t) = at + b$ et l'on obtient les résultats suivants :

$$a = 5 \text{ K} \cdot \text{mn}^{-1} = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} \quad b = 298 \text{ K} \quad r^2 = 1$$

Le coefficient de corrélation linéaire est égal à 1, le modèle est validé! Le coefficient directeur permet de déterminer la valeur de c . Par identification avec l'expression théorique :

$$a = \frac{RI^2}{mc + \mu c_\ell} \iff c = \frac{1}{m} \left(\frac{RI^2}{a} - \mu c_\ell \right) = 2,15 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

★★ Exercice 7 : Compresseur à plusieurs étages

1. La transformation de l'air est adiabatique et réversible, elle suit donc les lois de Laplace :

$$P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma = P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma \iff T_f = a T_0$$

2. Pour déterminer le travail des forces de pression, on applique à l'air le premier principe de la thermodynamique. La transformation est adiabatique donc :

$$W^1 = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) = \frac{nRT_0}{\gamma-1} (a-1) = 6,2 \text{ kJ}$$

3.a) En appliquant à nouveau les lois de Laplace à l'air dans le premier compresseur, on montre que sa température varie de T_0 à $T_1 = x T_0$. On répète la même démarche dans le deuxième compresseur pour déterminer la température finale :

$$P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_0^\gamma \iff T_f = \left(\frac{P_f}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 = \frac{a}{x} T_0$$

Le travail total fourni par les deux compresseurs vaut donc :

$$W^2 = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) + \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) \iff W^2 = \frac{nRT_0}{\gamma-1} \left(x + \frac{a}{x} - 2 \right)$$

TD23 : Premier principe - corrigé

3.b) On détermine dans un premier temps la valeur de x pour laquelle la fonction $W^2(x)$ est minimale :

$$(W^2)'(x) = \frac{nRT_0}{\gamma-1} \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

$(W^2)'(x)$ s'annule pour $x = \sqrt{a}$. Cela correspond à :

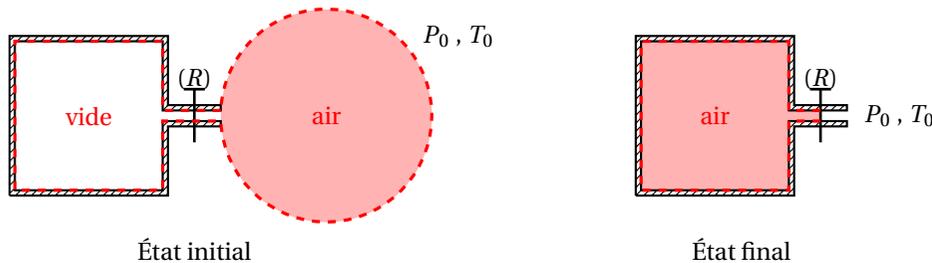
$$\frac{P_{1m}}{P_0} = \sqrt{\frac{P_f}{P_0}} \iff P_{1m} = \sqrt{P_0 P_f}$$

3.b Numériquement, on obtient :

$$P_{1m} = 3,5 \text{ bar} \quad \text{et} \quad W_{\min}^2 = \frac{nRT_0}{\gamma-1} (2\sqrt{a} - 2) = 5,1 \text{ kJ}$$

★★ Exercice 8 : Diffusion d'air dans une enceinte vide

On considère comme système fermé l'intérieur de l'enceinte (initialement vide) ainsi que la quantité d'air qui s'engouffre dans l'enceinte au cours de la transformation (voir schémas ci-dessous pour y voir plus clair).



On applique le premier principe de la thermodynamique à ce système, au cours de cette transformation :

$$\Delta U = W + Q$$

L'enceinte est calorifugée. Comme la transformation est très rapide, on peut également négliger les transferts thermiques qui ont lieu entre l'air interne au système et l'air externe. On considérera donc que la transformation est adiabatique : $Q = 0$.

Pour déterminer le travail des forces de pression, on précise d'abord que, d'après la définition choisie pour le système, les seules forces pressantes sont celles exercées par l'air extérieur, à la pression constante P_0 :

$$W = - \int P_{\text{ext}} dV = -P_0 (V_f - V_i)$$

où le volume initial du système est $V_i = V + V_0$ (on note V_0 le volume occupé par l'air interne dans l'état initial) et le volume final est $V_f = V$. Par conséquent :

$$W = -P_0 [V - (V + V_0)] = P_0 V_0 = nRT_0$$

où n est la quantité de matière en air interne.

Comme l'air est assimilé à un gaz parfait : $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0)$ d'où :

$$\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) = nRT_0 \iff T_f = \gamma T_0 = 417 \text{ K}$$

★★★ Exercice 9 : Chute d'une masse sur un piston

On lâche la masse d'une hauteur $H = 5 \text{ m}$. Dans l'état final, le gaz est comprimé par un piston (sans masse) sur lequel est posé une masse M . La pression finale vaut $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S} = 1,05 \text{ bar}$.

On considère le système {gaz interne + piston + masse M }. Dans un premier temps, on fait l'inventaire des transferts énergétique avec le milieu extérieur (ici l'atmosphère).

Il n'y a pas de travaux de forces de pression pour le piston et la masse M puisque ce sont des solides et que leur volume est fixe. En revanche, Le gaz interne est soumis aux forces de pression exercées par l'atmosphère et son volume (*a priori*) varie. La pression atmosphérique étant constante au cours de la transformation, le travail des forces de pression vaut :

$$W = -P_0 (V_1 - V_0)$$

Attention : on ne rajoute pas de terme $\frac{Mg}{S}$ dans P_{ext} car M est incluse dans le système. La pression extérieure est ici uniquement due à l'atmosphère !

Il n'y a pas de chaleur reçue au cours de cette transformation car le cylindre et le piston sont calorifugés (rq : on peut penser que la masse M et le piston pourraient s'échauffer légèrement à la suite du choc, mais on va négliger ce phénomène et considérer que c'est le gaz, en se comprimant, qui récupère l'intégralité de l'énergie mise en jeu au cours de la chute de M).

Dans un deuxième temps, on effectue le bilan énergétique ($\Delta E_c, \Delta E_p, \Delta U$) du système. On exclut d'emblée le piston qui n'a pas de masse.

$\Delta_{\text{masse}} E_c = 0$ puisque M est immobile dans l'état initial comme dans l'état final. $\Delta_{\text{masse}} U = 0$ également car on suppose que la température de la masse se conserve. En revanche, M chute donc il y a variation d'énergie potentielle de pesanteur : $\Delta_{\text{masse}} E_p = Mg\Delta z$.

La variation d'altitude de la masse M n'est pas due uniquement à sa hauteur de chute H . Il faut également tenir compte de la variation de l'altitude du piston suite au choc :

$$\Delta_{\text{masse}} E_p = -Mg \left(H + \frac{V_0 - V_1}{S} \right)$$

Ensuite, le seul terme qui concerne le gaz est $\Delta_{\text{gaz}} U = C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) = \frac{P_0 V_0}{T_0(\gamma-1)} (T_1 - T_0)$.

Rq : $\Delta_{\text{gaz}} E_c = 0$ rigoureusement car le gaz est au repos macro à l'état initial et final, en revanche $\Delta_{\text{gaz}} E_p$ n'est pas nul car le centre de gravité du gaz s'est un peu abaissé. Toutefois on néglige ce terme car la masse de gaz est sans doute négligable devant M donc $|\Delta_{\text{gaz}} E_p| \ll |\Delta_{\text{masse}} E_p|$.

On applique le premier principe de la thermodynamique au système {gaz interne + piston + masse M }. D'après ce que l'on a dit précédemment, il s'écrit sous la forme :

$$\Delta_{\text{masse}} E_p + \Delta_{\text{gaz}} U = W \iff -Mg \left(H + \frac{V_0 - V_1}{S} \right) + \frac{P_0 V_0}{T_0(\gamma-1)} (T_1 - T_0) = -P_0 (V_1 - V_0)$$

TD23 : Premier principe - corrigé

D'après la loi des gaz parfaits, puisque la quantité de gaz se conserve au cours de la transformation :

$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \times \left(1 + \frac{Mg}{P_0 S}\right) \times \frac{V_1}{V_0}$. En réadaptant l'expression du premier principe à ce problème, on obtient :

$$\frac{P_0 V_0}{(\gamma - 1) T_0} \left(T_0 \times \left(1 + \frac{Mg}{P_0 S}\right) \times \frac{V_1}{V_0} - T_0 \right) - Mg \left(H + \frac{V_0 - V_1}{S} \right) = -P_0 (V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\gamma - 1)} \left(\left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) \times V_1 - V_0 \right) - Mg \left(H + \frac{V_0 - V_1}{S} \right) = -P_0 (V_1 - V_0)$$

Après quelques simplifications de cette expression, on isole le volume final :

$$V_1 = \frac{P_0 V_0 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} Mg (H + a)}{P_0 + \frac{Mg}{S}} = 2,07 \text{ L}$$

On en déduit immédiatement $T_1 = T_0 \times \left(1 + \frac{Mg}{P_0 S}\right) \times \frac{V_1}{V_0} = 326 \text{ K}$.

Étonnamment, la chute de la masse sur le piston a pour effet d'augmenter le volume du gaz! La pression augmente à cause de l'action exercée par la masse mais la température augmente aussi car la masse fournit son énergie au gaz à la suite du choc. Numériquement, on calcule que la pression augmente de 5% et la température de 8,7%. C'est cette dernière qui a l'influence la plus forte sur la variation de volume. Comme le volume du gaz est proportionnel à $\frac{T}{P}$, celui-ci augmente à la suite du choc, ce qui signifie que le gaz se dilate.