Devoir n°27 (non surveillé)

Partie I - Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1) Calculer W_0 et W_1 .

2) À l'aide d'un changement de variables bien choisi, montrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

3) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. On pourra écrire $\sin^{n+2}(x) = \sin^{n+1}(x) \sin(x)$ et intégrer par parties.

5) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

6) Justifier que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ quand n tend vers $+\infty$.

7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

8) Déduire de ce qui précède que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

9) On a vu dans un devoir précédent qu'il existe un réel C non nul tel que $n! \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n}$. En utilisant les résultats des questions 5) et 8), déterminer la valeur de C .

Partie II - Un calcul de l'intégrale de Gauss

On a montré en classe que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ admet une limite finie en $+\infty$. Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de cette limite.

Pour tout entier naturel non nul n on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

1) a) À l'aide d'un changement de variables bien choisi, montrer que $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$.

b) En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2) a) À l'aide d'un changement de variables bien choisi, montrer que $J_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} x dx$.

b) Montrer que $0 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n x dx \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) a) Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout réel $x > -1$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

c) En déduire la limite de $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.