Correction du DNS 25

EXERCICE 1

1) C'est faux. Contre-exemple : $u_n = e^n$. On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e$ qui ne tend pas vers 1.

2) C'est faux. Contre-exemple : $n+1 \sim n$ mais $(n+1)-n$ tend vers 1.

3) C'est faux. Contre-exemple : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 0 mais $\dfrac{1}{n} \not\sim \dfrac{1}{n^2}$.

4) C'est vrai : $\dfrac{u_n}{\ell}$ tend vers 1 donc $u_n \sim \ell$.

5) C'est vrai : $\dfrac{a_n u_n}{a_n v_n} = \dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 0.

6) C'est faux. Contre-exemple : $u_n = 1$, $v_n = n$ et $a_n = n^2$. On a alors $u_n = o(v_n)$ mais $a_n + u_n = n^2 + 1$ n'est pas négligeable devant $a_n + v_n = n^2 + n$.

7) C'est faux. Contre-exemple : $a_n = u_n = n$ et $v_n = n - 1$.

8) C'est faux. Contre-exemple : $v_n = n$ et $u_n = n + (-1)^n$. La suite (v_n) est croissante, on a $u_n \sim v_n$, mais la suite (u_n) n'est pas croissante : $(u_n) = (1, 0, 3, 2, 5, 4, \ldots)$.

9) C'est faux. Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = n + \pi$. On a $u_n \sim v_n$ mais $\sin v_n = -\sin u_n$ donc $\dfrac{\sin u_n}{\sin v_n}$ tend vers -1.

10) C'est vrai : $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 donc $\sin u_n \sim u_n \sim v_n \sim \sin v_n$.

EXERCICE 2

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ d'après les théorèmes sur les opérations.

Montrons que f est continue en 0. Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ non nul on a

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - x^3/6 + o(x^3))}{x^2 + o(x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/6}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0 (on a utilisé le fait que $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 au dénominateur).

Pour la dérivabilité en 0 on peut calculer la limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ou, en reprenant le calcul précédent, écrire que

$$f(x) = \frac{x}{6} + o(x)$$

au voisinage de 0. La fonction admet un DL d'ordre 1 en 0, donc elle est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

Si $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Montrons que f' est continue en 0. Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ non nul on a

$$f'(x) = \frac{-x^2(1 - x^2/2 + o(x^2)) + (x - x^3/6 + o(x^4))^2}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4/6 + o(x^4)}{x^4} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{6} = f'(0)$$

donc f' est continue en 0.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

Noter qu'en utilisant le théorème de limite de la dérivée on pouvait directement calculer la limite de f' en 0 sans montrer auparavant la dérivabilité de f en 0.

EXERCICE 3

Montrons d'abord que $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$. Pour cela il suffit que montrer que a et b peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de u et de v. On cherche donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a = \alpha u + \beta v$:

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v = a &\Leftrightarrow \alpha(1, 0, -3) + \beta(-2, 5, 1) = (-1, 2, 1) \\
&\Leftrightarrow (\alpha - 2\beta, 5\beta, -3\alpha + \beta) = (-1, 2, 1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -1 \\ 5\beta = 2 \\ -3\alpha + \beta = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

qui donne facilement $\alpha = -\dfrac{1}{5}$ et $\beta = \dfrac{2}{5}$. Ainsi on a $a = -\dfrac{1}{5}u + \dfrac{2}{5}v$. De la même manière on trouve que $b = \dfrac{2}{5}u + \dfrac{1}{5}v$.

On a donc montré que a et b appartiennent à $\text{Vect}(u, v)$. Or $\text{Vect}(a, b)$ est le plus petit sous-espace qui contient a et b, donc on a $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(u, v)$.

On peut montrer de manière analogue que $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(a, b)$ mais il y a plus simple : les familles (a, b) et (u, v) sont clairement libres donc $\text{Vect}(a, b)$ et $\text{Vect}(u, v)$ sont des sous-espaces de dimension 2.

On a ainsi $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(u, v)$ et $\dim \text{Vect}(a, b) = \dim \text{Vect}(u, v)$ donc, d'après un théorème du cours, $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$.

EXERCICE 4

1) La fonction nulle est dérivable et si f et g sont deux fonctions dérivables et que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable. Par conséquent E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc également un espace vectoriel.

2) La fonction nulle appartient à F et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$ alors $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$ et $(\alpha f + \beta g)'(0) = \alpha f'(0) + \beta g'(0) = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in F$.

La fonction nulle est affine et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et que $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$ sont deux fonctions affines alors $\alpha f + \beta g$ est affine aussi puisque $(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha a + \beta c)x + \alpha b + \beta d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les ensembles F et G sont donc des sous-espaces vectoriels de E.

3) Montrons par analyse-synthèse que toute fonction f de E peut s'écrire de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Analyse : supposons qu'il existe $g \in F$ et $h \in G$ telles que $f = g + h$.

La fonction h est affine donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus $g \in F$ donc $f(0) = g(0) + h(0) = b$ et $f'(0) = g'(0) + h'(0) = a$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc $h(x) = f'(0)x + f(0)$ et $g(x) = f(x) - f'(0)x - f(0)$. Si g et h existent elles sont donc uniques.

Synthèse : soient g et h comme ci-dessus.

Alors $f = g + h$, $g(0) = g'(0) = 0$ donc $g \in F$ et h est affine donc $h \in G$. Les fonctions g et h conviennent.

Conclusion : les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.