Corrigé DS7 - concours blanc

Exercice 1 : Cycle de Diesel à double combustion

1. $\boxed{n = \dfrac{P_{\min} V_1}{RT_1} = 78 \times 10^{-3}\,\text{mol}}$.

2. $\boxed{C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1} = 1{,}6\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$ et $\boxed{C_P = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1} = 2{,}3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$.

3. Une transformation peut-être considérée comme adiabatique si elle est très rapide devant le temps caractéristique des transferts thermiques entre le système et le milieu extérieur. Un moteur à essence fonctionne généralement à un rythme de l'ordre de 1000 tours/minute, soit un tour toutes les **60 ms**. Cette durée est très faible et laisse supposer que le modèle de transformation adiabatique peut être envisagé en première approximation.

4. Le cycle est **moteur** car il est parcouru dans le sens horaire. Les transformations au cours desquelles le travail des forces de pression reçu par le gaz est négatif sont $3 \to 4$ et $4 \to 5$ (le volume augmente).

5. La transformation $1 \to 2$ est adiabatique réversible, on peut appliquer les lois de Laplace :

$$\begin{cases} P_2 V_2^{\gamma} = P_{\min} V_1^{\gamma} \iff \boxed{P_2 = P_{\min}\alpha^{\gamma} = 44{,}3\,\text{bar}} \\ T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \iff \boxed{T_2 = T_1\alpha^{\gamma-1} = 866\,\text{K}} \end{cases}$$

6. $\boxed{W_{12} = \Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = 929\,\text{J}}$.

7. La transformation $2 \to 3$ est isochore, d'où $\dfrac{P_2}{T_2} = \dfrac{P_{\max}}{T_3} \iff \boxed{T_3 = T_2\dfrac{P_{\max}}{P_2} = 1172\,\text{K}}$.

8. La transformation $3 \to 4$ est isobare, le travail des forces de pression vaut $W_{34} = -\Delta(PV) = -nR\Delta T = -nR(T_4 - T_3)$. Le premier principe appliqué à l'air sur la transformation $2 \to 4$ donne :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_4 - T_2) = Q_{\text{comb}} - nR(T_4 - T_3) \iff \frac{\gamma nR}{\gamma-1}T_4 = Q_{\text{comb}} + \frac{nR}{\gamma-1}T_2 + nRT_3$$

$$\iff \boxed{T_4 = \frac{\gamma-1}{\gamma nR}Q_{\text{comb}} + \frac{T_2}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}T_3 = 2144\,\text{K}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_4 = \frac{nRT_4}{P_{max}} = 0{,}23\,\text{L}}$$

9. $\boxed{W_{24} = -nR(T_4 - T_3) = -630\,\text{J}}$.

10. On applique à nouveau les lois de Laplace :

$$\boxed{P_5 = P_{\max}\left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma} = 3{,}15\,\text{bar}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_5 = T_4\left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1} = 924\,\text{K}}$$

11. $\boxed{W_{45} = \dfrac{nR}{\gamma-1}(T_5 - T_4) = -1{,}98\,\text{kJ}}$ et $\boxed{W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{24} + W_{45} = -1{,}68\,\text{kJ}}$.

12. η est le rapport entre l'énergie utile récupérée pour faire avancer le véhicule et l'énergie dépensée pour faire fonctionner le moteur. Il a bien le sens d'un rendement.

$$\boxed{\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{comb}}} = \frac{1{,}7}{2{,}7} = 62\%}$$

Le rendement est inférieur à l'unité, cela signifie qu'une partie de l'énergie fournie par la transformation chimique n'est pas utilisée. Elle est dissipée sous forme de chaleur à l'intérieur du moteur (d'où la nécessité d'avoir un circuit de refroidissement pour éviter la surchauffe!)

13. La puissance totale fournie par les quatre cylindres vaut $\mathscr{P} = 4\dfrac{N}{60}|W_{\text{cycle}}| = \dfrac{N|W_{\text{cycle}}|}{15}$ où N représente le nombre de cycle par minute. Comme chaque cycle correspond à deux tours on peut écrire $R = 2N$ où R est le régime moteur en tours par minute. On conclut :

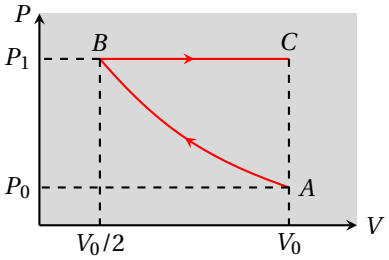
$$\mathscr{P} = \frac{R|W_{\text{cycle}}|}{30} \iff \boxed{R = \frac{30\mathscr{P}}{|W_{\text{cycle}}|} = 3{,}6 \times 10^3\,\text{tours/min}}$$

Exercice 2 : Mesurer γ

1. La transformation $A \longrightarrow B$ est adiabatique et réversible, on peut donc la qualifier **d'isentropique**.

Au cours de la transformation $B \to C$ la pression extérieure P_1 est constante, mais elle est aussi égale à la pression interne car la transformation est lente. On peut conclure que la transformation est **isobare** de pression P_1.

2. On représente ci-dessous l'allure des deux transformations sur un diagramme (P, V).



3. $\boxed{C_{V,m} = \dfrac{R}{\gamma-1}}$ et $\boxed{C_{P,m} = \dfrac{\gamma R}{\gamma-1}}$.

Pour un gaz parfait monoatomique $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$ et $C_{P,m} = \frac{5}{2}R$, on en déduit que $\boxed{\gamma = \dfrac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \dfrac{5}{3}}$.

Pour un gaz parfait diatomique $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$ et $C_{P,m} = \frac{7}{2}R$, on en déduit que $\boxed{\gamma = \dfrac{7}{5} = 1{,}4}$.

4. La transformation $A \to B$ est adiabatique réversible et le système est un gaz parfait. On peut appliquer les **lois de Laplace**.

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_1\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma} \iff \boxed{P_1 = 2^{\gamma}P_0} \quad ; \quad T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma-1} \iff \boxed{T_1 = 2^{\gamma-1}T_0}$$

5. Le travail électrique reçu par le résistor vaut $\boxed{W_{BC}^{\text{res}} = rI^2\Delta t = 9{,}6\,\text{kJ}}$.

6. Le travail des forces de pression reçu par le gaz au cours de la transformation isobare $B \to C$ vaut :

$$W_{BC} = -\int_{V_0/2}^{V_0} P_1 \mathrm{d}V = -P_1\left(V_0 - \frac{V_0}{2}\right) = -\frac{P_1 V_0}{2} \iff \boxed{W_{BC} = -2^{\gamma-1} P_0 V_0}$$

7. D'après la première loi de Joule $\Delta U_{BC} = C_V \Delta T_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{P_0 V_0}{(\gamma-1)T_0}(T_2 - T_1)$.

La transformation $B \to C$ est isobare et la quantité de matière se conserve donc $\frac{T_1}{V_0/2} = \frac{T_2}{V_0} \iff T_2 = 2T_1$. On en déduit que :

$$\Delta U_{BC} = \frac{P_0 V_0}{(\gamma-1)T_0} T_1 \iff \boxed{\Delta U_{BC} = \frac{2^{\gamma-1}}{\gamma-1} P_0 V_0}$$

8. On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz dans le compartiment de gauche, pour la transformation $B \to C$:

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$$

On suppose que l'intégralité du travail électrique consommé par le résistor est converti en énergie thermique captée par le gaz du compartiment de gauche (on néglige la capacité thermique du résistor), on a donc $Q_{BC} = W_{BC}^{\text{res}}$. D'après les résultats précédents il vient que :

$$\frac{2^{\gamma-1}}{\gamma-1} P_0 V_0 = -2^{\gamma-1} P_0 V_0 + rI^2\Delta t \iff \boxed{\frac{rI^2\Delta t}{P_0 V_0} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right) 2^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} 2^{\gamma-1}}$$

9. Numériquement on trouve $\frac{rI^2\Delta t}{P_0 V_0} = 4{,}8$. En se rapportant au graphe fourni on trouve les deux valeurs possibles de γ :

$$\boxed{\gamma = 1{,}36} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\gamma = 2{,}59}$$

La première valeur est proche de celle d'un gaz parfait diatomique, elle semble la plus plausible.

10. Au cours de la transformation $C \to B$ le résistor prélèverait de l'énergie thermique au gaz du compartiment de gauche pour la convertir spontanément en énergie électrique qui alimenterait le circuit.

11. On applique le second principe au système {gaz du compartiment de gauche + résistor} pour la transformation $A \to B \to C$:

$$\Delta S_{AC} = S_e^{AC} + S_c^{AC}$$

On néglige la capacité thermique du résistor donc :

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AC}^{\text{gaz}} = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_0} - nR\ln\frac{P_1}{P_0} = \frac{\gamma P_0 V_0}{(\gamma-1)T_0}\ln\left(2^\gamma\right) - \frac{P_0 V_0}{T_0}\ln\left(2^\gamma\right) = \frac{\gamma\ln 2}{\gamma-1} \times \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

Le système {gaz du compartiment de gauche + résistor} n'échange pas de transfert thermique avec le milieu extérieur au cours de $A \to B \to C$: $S_e^{AC} = 0$. On conclut alors quant à la valeur de l'entropie créée :

$$\boxed{S_c^{AC} = \Delta S_{AC} = \frac{\gamma\ln 2}{\gamma-1} \times \frac{P_0 V_0}{T_0} = 17{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$$

12. L'entropie créée est strictement positive donc la transformation $A \to B \to C$ est observable et irréversible ; par conséquent **il est impossible d'observer spontanément la transformation inverse** $C \to B \to A$.

Remarque : il est dit dans l'énoncé que la transformation $A \to B$ est supposé réversible. C'est donc la transformation $C \to B$ qui est impossible à observer, et pour cause, l'effet Joule qui est à l'œuvre dans la transformation $B \to C$ est fondamentalement irréversible. De l'énergie thermique (forme désordonnée d'énergie) ne se transforme jamais spontanément en travail électrique (forme ordonnée d'énergie).

Exercice 3 : Expulsion d'un projectile par une arme à feu

On applique le premier principe de la thermodynamique au système {gaz internes + projectile} :

$$\Delta(U + E_c) = W + Q$$

On effectue plusieurs hypothèses simplificatrices :

- on néglige l'échauffement du projectile pendant la phase d'accélération (la transformation est très rapide donc ce n'est pas une hypothèse aberrante) donc $\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{pro}} \simeq \Delta U_{\text{gaz}}$;
- on néglige l'énergie cinétique des gaz internes comparée à celle du projectile (en supposant que le mélange de gaz interne a une masse molaire proche de celle de l'air on trouve que la masse des gaz est inférieure à un gramme, ce qui donne du crédit à cette hypothèse) donc $\Delta E_c = \Delta E_{c,\text{gaz}} + \Delta E_{c,\text{pro}} \simeq \Delta E_{c,\text{pro}} = \frac{1}{2} m v_s^2$;
- on néglige les frottements de l'air ainsi que les frottements entre le projectile et les parois du canon ;
- on suppose que la pression de l'air côté extérieur reste uniforme égale à P_0 tout au long du déplacement du projectile.

On exprime le travail de la force de pression exercée par l'atmosphère extérieure :

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P_0 \mathrm{d}V = -P_0(V_2 - V_1) = -P_0 V_1(\alpha - 1)$$

La transformation est adiabatique donc $Q = 0$.

On exprime la variation d'énergie interne des gaz :

$$\Delta U_{\text{gaz}} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

On détermine la température T_2 à l'aide d'une loi de Laplace (transformation supposée adiabatique et réversible des gaz internes assimilés à des gaz parfaits) :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} = T_2(\alpha V_1)^{\gamma-1} \iff T_2 = \alpha^{1-\gamma} T_1$$

On résume les résultats précédents en revenant à l'expression du premier principe :

$$\Delta(U + E_c) \simeq \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta E_{c,\text{pro}} = W \iff \frac{\alpha^{1-\gamma} - 1}{\gamma-1} P_1 V_1 + \frac{1}{2} m v_s^2 = -P_0 V_1(\alpha - 1)$$

On détermine finalement la vitesse d'expulsion du projectile :

$$\boxed{v_s = \sqrt{\frac{2V_1}{m}\left(\frac{1 - \alpha^{1-\gamma}}{\gamma-1} P_1 - (\alpha - 1) P_0\right)} = 3{,}9 \cdot 10^2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$