Correction du DNS 26

EXERCICE 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 ((1-x)^{n+1} e^{-x} - (1-x)^n e^{-x}) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} (1-x-1) dx \\ &= -\int_0^1 x(1-x)^n e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Or $x(1-x)^n e^{-x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

De plus $(1-x)^n e^{-x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (I_n) est donc minorée par 0.

Elle est donc convergente (et sa limite est positive).

2) Pour tout $x \in [0,1]$ on a $e^{-x} \leqslant 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n dx$. De plus

$$\int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes I_n aussi.

3) Posons $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = -e^{-x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En intégrant par parties on obtient donc

$$I_{n+1} = \left[-(1-x)^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx = 1 - (n+1) I_n.$$

4) La relation précédente donne $I_n = \dfrac{1 - I_{n+1}}{n+1}$. Or I_{n+1} tend vers 0 en $+\infty$ donc $1 - I_{n+1}$ tend vers 1 et donc $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{I_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} - \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

Or $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{I_{n+1}}{n+1} \sim \dfrac{1}{(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc

$$I_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{2}{n^2}$$

au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 2

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n = u_n$ donc (u_n) est 2-périodique (et $u_1 \neq u_0$ donc 2 est sa plus petite période).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+6} = \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{n\pi}{3} = v_n$ donc (v_n) est 6-périodique (et en calculant les premiers termes on voit que 6 est sa plus petite période).

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit q_n le quotient dans la division euclidienne de 2^n par 5 (le reste étant w_n). On a donc $2^n = 5q_n + w_n$ avec $0 \leqslant w_n < 5$, donc :

$$2^{n+4} = 16 \times 2^n = 16(5q_n + w_n) = 80q_n + 16w_n = 5(16q_n + 3w_n) + w_n$$

Ainsi w_n est aussi le reste dans la division euclidienne de 2^{n+4} par 5, c'est-à-dire que $w_n = w_{n+4}$. La suite (w_n) est donc 4-périodique (et en calculant les premiers termes on voit que 4 est sa plus petite période).

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_{n+3} = (-1)^{F_{n+3}} = (-1)^{F_{n+2}+F_{n+1}} = (-1)^{F_n+2F_{n+1}} = (-1)^{F_n} = x_n$, donc (x_n) est 3-périodique (et en calculant les premiers termes on voit que 3 est sa plus petite période).

2) a) Pour montrer que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel on va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'espace des suites réelles).

La suite nulle est périodique donc $\mathcal{P}$ n'est pas vide.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in \mathcal{P}$. Notons p et q les périodes respectives de (u_n) et (v_n). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\alpha u_{n+pq} + \beta v_{n+pq} = \alpha u_n + \beta v_n$, donc la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est pq-périodique. Elle appartient donc à $\mathcal{P}$.

Ainsi $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un espace vectoriel.

De même, la suite nulle est p-périodique, donc $\mathcal{P}_p$ n'est pas vide, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in \mathcal{P}_p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\alpha u_{n+p} + \beta v_{n+p} = \alpha u_n + \beta v_n$, donc la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est p-périodique, et donc elle appartient à $\mathcal{P}_p$.

Ainsi $\mathcal{P}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

b) L'idée est qu'une suite p-périodique (u_n) peut s'écrire

$$\begin{aligned}(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, \ldots) = u_0(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) + u_1(0, 1, \ldots, 0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) + \ldots \\ + u_{p-1}(0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 1, \ldots).\end{aligned}$$

Plus formellement, soit $e^{(k)}$ la suite définie par

$$e_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \bmod p = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. Autrement dit, $e^{(0)} = (1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $e^{(1)} = (0, 1, \ldots, 0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots)$, etc.

Alors la famille $(e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(p-1)})$ est clairement libre, et si $u \in \mathcal{P}_p$ on peut écrire comme ci-dessus

$$u = u_0 e^{(0)} + u_1 e^{(1)} + \ldots + u_{p-1} e^{(p-1)}$$

donc elle est génératrice de $\mathcal{P}_p$. C'est donc une base de $\mathcal{P}_p$, qui par conséquent est de dimension p.

c) Pour le a) on a $(u_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots) = e^{(0)} - e^{(1)}$. Les coordonnées de (u_n) dans la base $(e^{(0)}, e^{(1)})$ de $\mathcal{P}_2$ sont donc $(1, -1)$.

Pour le b) on a $(v_n) = (1, 1/2, -1/2, -1, -1/2, 1/2, 1, 1/2, -1/2, -1, -1/2, 1/2, \ldots) = e^{(0)} + (1/2)e^{(1)} - (1/2)e^{(2)} - e^{(3)} - (1/2)e^{(4)} + (1/2)e^{(5)}$. Les coordonnées de (v_n) dans la base $(e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}, e^{(5)})$ de $\mathcal{P}_6$ sont donc $(1, 1/2, -1/2, -1, -1/2, 1/2)$.

Pour le c) on a $(w_n) = (1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, \ldots) = e^{(0)} + 2e^{(1)} + 4e^{(2)} + 3e^{(3)}$. Les coordonnées de (w_n) dans la base $(e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$ de $\mathcal{P}_4$ sont donc $(1, 2, 4, 3)$.

Pour le d) on a $(x_n) = (1, -1, -1, 1, -1, -1, \ldots) = e^{(0)} - e^{(1)} - e^{(2)}$. Les coordonnées de (x_n) dans la base $(e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)})$ de $\mathcal{P}_3$ sont donc $(1, -1, -1)$.

d) L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ n'est pas de dimension finie puisque, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$: si $\mathcal{P}$ était de dimension finie on aurait $p = \dim \mathcal{P}_p \leqslant \dim \mathcal{P}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible.

e) Les suites constantes sont à la fois p-périodiques et q-périodiques, donc $\mathcal{P}_p \cap \mathcal{P}_q \neq \{0\}$. Les sous-espaces $\mathcal{P}_p$ et $\mathcal{P}_q$ ne sont donc pas supplémentaires.