

Devoir n°28 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$. On n'essaiera pas de calculer cette intégrale.

1) Montrer sans calculer sa dérivée que f est décroissante.

2) Soit x_0 un réel strictement positif.

a) Montrer que $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x - x_0|}{x_0^2}$ pour tout $x \geq \frac{x_0}{2}$.

b) En déduire que f est continue en x_0 .

3) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.

b) En déduire la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

4) a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $e^t - 1 \leq et$ pour tout $t \in [0, 1]$.

b) En déduire que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

c) En déduire que $f(x) \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

5) Dans cette question on se propose de déterminer une valeur approchée de $f(1)$. On pose $h(t) = \frac{e^t}{1+t}$ pour $t \in [0, 1]$

et on considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

a) Donner une interprétation géométrique de u_n et v_n (faire un dessin). Quelles sont les limites des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer que h est croissante sur $[0, 1]$.

c) En déduire que $\frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

d) En déduire que $u_n \leq f(1) \leq v_n$ puis que $\left|f(1) - \frac{u_n + v_n}{2}\right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Déterminer en utilisant ce qui précède une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-1} près.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.

2) Étudier la parité de f .

3) a) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

b) En déduire les variations de f .

4) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

b) En déduire la limite et un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + o(x)$ au voisinage de 0. On pourra considérer $f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.