TD 26 : Machines thermiques - corrigé

⋆ Exercice 1 : Centrale électrique

1. Une centrale électrique est un moteur thermique ditherme qui consomme la chaleur venant d'une source chaude (le cœur du réacteur) et produit un travail électrique. Le rendement théorique maximal de la centrale (rendement de Carnot) vaut : $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$. Le rendement réel vaut donc :

$$\boxed{\eta = 0,6\eta_c = 0,6\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) = 0,30}$$

2. Le travail fourni par la centrale vaut $\boxed{W_{\text{fourni}} = \mathscr{P}\Delta t = 3,6\,\text{TJ}}$ (rq : $1\,\text{TJ} = 10^{12}\,\text{J}$). :
On rappelle la définition du rendement d'un moteur thermique :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c}$$

où W est le travail **reçu** par le moteur sur un cycle donc $W = -W_{\text{fourni}}$. On calcule le transfert thermique reçu du cœur du réacteur :

$$\boxed{Q_c = \frac{W_{\text{fourni}}}{\eta} = 11,9\,\text{TJ}}$$

On applique le premier principe :

$$\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$$

avec Q_f le transfert thermique **reçu** par la centrale. Ici le transfert thermique libéré par la centrale dans le fleuve vaut $Q_{\text{fleuve}} = -Q_f$:

$$\boxed{Q_{\text{fleuve}} = Q_c - W_{\text{fourni}} = 8,3\,\text{TJ}}$$

3. Au cours d'une durée Δt, la masse d'eau qui traverse une section du fleuve et échange de la chaleur avec la centrale vaut $m = \rho D_v \Delta t$. On applique le premier principe à cette masse m :

$$\Delta U = Q_{\text{fleuve}} \iff mc_\ell \Delta\theta = Q_{\text{fleuve}} \iff \rho D_v c_\ell \Delta t \Delta\theta = Q_{\text{fleuve}} \iff \boxed{\Delta\theta = \frac{Q_{\text{fleuve}}}{\rho D_v c_\ell \Delta t} = 1,8\,°\text{C}}$$

⋆⋆ Exercice 2 : Cycle de Brayton-Joule

1. Ce cycle est celui d'un moteur thermique donc le rendement est défini par $\eta = -W_{\text{cycle}}/Q_c$. Il convient d'identifier la transformation au cours de laquelle le transfert thermique reçu est positif. Les transformations $1 \to 2$ et $3 \to 4$ sont adiabatiques. Au cours de $4 \to 1$, le gaz se refroidit (volume diminue à pression constante) et au cours de $2 \to 3$ il se réchauffe. On en déduit que $Q_c = Q_{23}$.
On applique ensuite le premier principe au moteur sur un cycle entier :

$$\Delta U = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{23} + Q_{41} \iff -W_{\text{cycle}} = Q_{23} + Q_{41}$$

On conclut que :

$$\eta = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} \iff \boxed{\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}}$$

2. On applique le premier principe au gaz au cours de $2 \to 3$, isobare : $Q_{23} = \Delta H_{23} = C_p(T_3 - T_2)$.

On fait de même pour la transformation $4 \to 1$ isobare : $Q_{41} = \Delta H_{41} = C_p(T_1 - T_4)$.
On en déduit l'expression du rendement en fonction des différentes températures :

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

3. Les transformations $1 \to 2$ et $3 \to 4$ sont adiabatiques réversibles et le système est un gaz parfait donc on peut appliquer les lois de Laplace :

$$\begin{cases} P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \iff T_1 = a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2 \\ P_1^{1-\gamma} T_4^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_3^\gamma \iff T_4 = a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_3 \end{cases}$$

On obtient finalement pour le rendement l'expression suivante :

$$\eta = 1 + \frac{a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}(T_2 - T_3)}{T_3 - T_2} \iff \boxed{\eta = 1 - a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0,45}$$

⋆⋆ Exercice 3 : Réfrigérateur à absorption

1. Ce réfrigérateur à absorption doit obligatoirement respecter le deuxième principe de la thermodynamique. Pour établir l'équivalent de l'inégalité de Clausius, on écrit les deux principes, appliqué au fluide caloporteur, au cours d'un cycle :

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + S_c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Q_2 = -Q_1 - Q_3 \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \leq 0 \end{cases}$$

En injectant l'expression de Q_2 dans l'inégalité, on obtient la condition suivante sur Q_1 et Q_3 :

$$\boxed{Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) + Q_3\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}\right) \leq 0}$$

2. Dans un réfrigérateur à absorption, la source auxiliaire joue le rôle de source primaire d'énergie (elle remplace la ligne électrique qui alimente un réfrigérateur classique). On peut alors adapter la définition de l'efficacité de ce réfrigérateur de la manière suivante : $e = \frac{Q_1}{Q_3}$. Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire l'inégalité vérifiée par l'efficacité :

$$e = \frac{Q_1}{Q_3} \leq \frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} \iff \boxed{e \leq e_{\max} = \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = 1,9}$$

3. Un réfrigérateur classique fonctionnant entre des sources de température T_1 et T_2 a une efficacité maximale :

$$\boxed{e_{\text{carnot}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 7,6}$$

Le réfrigérateur à absorption possède une efficacité théorique maximale bien plus faible que celle d'un réfrigérateur classique. Un tel réfrigérateur n'est donc pas destiné à remplacer les appareils classiques, mais il a l'avantage d'être mobile.

⋆⋆ Exercice 4 : Chauffage d'une habitation

1. Le transfert thermique dégagé par la combustion du bois doit compenser celui perdu à cause des fuites thermiques. Pendant une durée $\Delta t = 1\,\text{h}$, cette quantité d'énergie vaut $\phi \Delta t$.

$$m_B q_B = \phi \Delta t \iff \boxed{m_B = \frac{\phi \Delta t}{q_B} = 2,4\,\text{kg}}$$

2. La PAC fonctionne de manière réversible donc son efficacité est maximale :

$$\boxed{e = \frac{T_H}{T_H - T_E} = 14,65}$$

3. On rappelle la définition de l'efficacité d'une PAC, écrite en termes de puissances :

$$e = -\frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}}$$

où $\mathcal{P}_c$ est la puissance thermique cédée à la source chaude et $\mathcal{P}$ la puissance électrique consommée par la PAC. La puissance $\mathcal{P}_c$ doit compenser la puissance dissipée par les fuites thermiques donc $\mathcal{P}_c = -\phi$ (on rappelle que $\mathcal{P}_c < 0$ car la PAC **fournit** un transfert thermique à la source chaude).

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\phi}{e} = 0,82\,\text{kW}}$$

4. Pour le moteur thermique (M) : $\boxed{Q_C > 0}$, $\boxed{Q'_F < 0}$ et $\boxed{W > 0}$ (attention au sens de la flèche pour W, il s'agit du travail **fourni** par le moteur au milieu extérieur).
Pour la PAC : $\boxed{Q_C < 0}$ et $\boxed{Q_F > 0}$.

5. Par définition du rendement du moteur (attention encore au sens de W) :

$$\eta = \frac{W}{Q'_C} \iff \boxed{W = \eta Q}$$

On applique le premier principe au fluide du moteur, sur un cycle :

$$-W + Q'_C + Q'_F = 0 \iff \boxed{Q'_F = W - Q = (\eta - 1)Q}$$

Par définition de l'efficacité de la PAC :

$$e = -\frac{Q_C}{W} \iff \boxed{Q_C = -eW = -e\eta Q}$$

On applique le premier principe au fluide de la PAC, sur un cycle :

$$W + Q_C + Q_F = 0 \iff \boxed{Q_F = -W - Q_C = \eta(e-1)Q}$$

Le transfert thermique total reçu par l'habitation vaut :

$$\boxed{Q_H = -Q'_F - Q_C = (e\eta + 1 - \eta)Q}$$

6. La PAC fonctionne de manière réversible donc $e = 14,65$ (cf question 2). Le moteur est lui aussi réversible donc $\eta = 1 - T_H/T = 0,489$. Comme on l'a vu à la question 1, le transfert thermique à fournir à l'habitation pendant une heure doit être égal à $\phi \Delta t$ pour compenser les fuites thermiques :

$$(e\eta + 1 - \eta)Q = \phi \Delta t \iff Q = m'_B q_B = \frac{\phi \Delta t}{e\eta + 1 - \eta} \iff \boxed{m'_B = \frac{\phi \Delta t}{q_B(e\eta + 1 - \eta)} = 0,31\,\text{kg}}$$

L'utilisation du moteur et de la PAC permet de réduire la consommation en combustible d'un facteur supérieur à 7 comparé à un chauffage par chaudière.

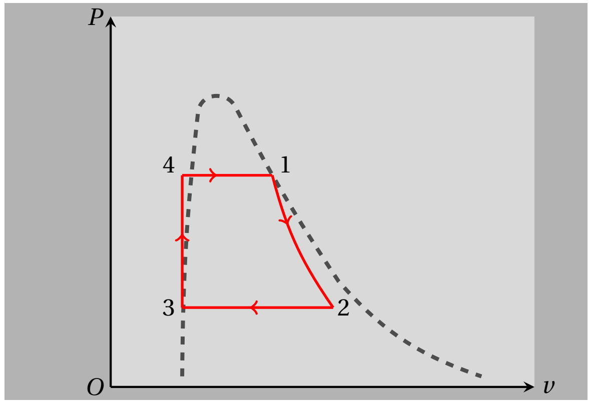
⋆⋆ Exercice 5 : Réacteur nucléaire à eau pressurisée (REP)

Dans la pompe, la compression de l'eau liquide est adiabatique et réversible donc **isentropique**. Or $\Delta S = C \ln(T_f/T_i) = 0$ donc $T_f = T_i$: **la température se conserve**. Enfin, $\Delta H = C\Delta T = 0$ donc **l'enthalpie se conserve elle-aussi**. On applique le premier principe à l'eau liquide :

$$\Delta U = W \implies W = C\Delta T = 0$$

Le travail reçu par l'eau liquide est nul.

2.



3. La détente dans la turbine est elle-aussi isentropique donc $s_2 = s_1$. On calcule x_2 avec le théorème des moments :

$$\boxed{x_2 = \frac{s_1 - s_L(306)}{s_V(306) - s_L(306)} = 0,6743}$$

On calcule h_2 en utilisant à nouveau le théorème des moments :

$$\boxed{h_2 = x_2 h_V(306) + (1 - x_2)h_L(306) = 1772,1\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

4. Dans le condenseur, la liquéfaction est isobare et isotherme donc $\boxed{T_3 = 306\,\text{K}}$. Dans l'état 3, l'eau est sous la forme d'un liquide saturant donc $\boxed{x_3 = 0}$. On applique le premier principe à l'eau sur $2 \to 3$:

$$\boxed{q_C = h_L(306) - h_2 = -1634,3\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

5. On a vu que l'enthalpie se conserve au cours de la compression : $h_4 = h_3 = h_L(306)$. On applique le premier principe à l'eau sur $4 \to 1$:

$$\boxed{q_{GV} = h_V(559) - h_L(306) = 2635,7\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$$

6. On applique le premier principe à l'eau sur un cycle entier :

$$w + q_{GV} + q_C = 0 \iff w = -q_{GV} - q_C$$

Le rendement du cycle vaut :

$$\boxed{\eta = -\frac{w}{q_{GV}} = 1 + \frac{q_C}{q_{GV}} = 0,38}$$

Le rendement maximal que l'on peut obtenir avec ces deux sources vaut :

$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,45}$$

Pour justifier l'écart entre ces deux valeurs, il faut chercher des **sources d'irréversibilité** dans ce cycle. La compression et la détente sont réversibles. La liquéfaction et la vaporisation aussi car elles sont isobare/isotherme et au contact d'un thermostat qui est à la température du changement d'état. La seule partie irréversible de ce cycle est le **réchauffement isobare** qui se produit dans le générateur de vapeur avant la vaporisation. C'est ce qui explique que le rendement est inférieur au rendement de Carnot.

7. Le travail algébriquement consommé sur un cycle par unité de masse d'eau vaut $w = -q_{GV} - q_C$. Par analyse dimensionnelle, on exprime la puissance **fournie** :

$$\mathscr{P} = -D_m w \iff \boxed{D_m = \frac{\mathscr{P}}{q_C + q_{GV}} = 1,0\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}}$$

⋆⋆ Exercice 6 : Refroidissement de l'eau d'une patinoire

1. Pour une machine frigorifique l'énergie "utile" est le transfert thermique prélevé à la source froide ($\delta Q_f > 0$) tandis que l'énergie dépensée est le travail consommé sur un cycle ($\delta W > 0$). Comme la machine fonctionne de manière réversible son efficacité est égale à l'efficacité de Carnot :

$$\boxed{e = \frac{\delta Q_f}{\delta W} = \frac{T(t)}{T_c - T(t)}}$$

2. Le travail élémentaire reçu par la machine sur un cycle vaut $\delta W = \mathscr{P}\mathrm{d}t$. D'après la relation précédente :

$$\boxed{\delta Q_f = \frac{T(t)}{T_c - T(t)}\mathscr{P}\mathrm{d}t}$$

3. On applique le premier principe à l'eau sur un cycle de la machine. Au cours d'un cycle l'eau reçoit algébriquement le transfert thermique $-\delta Q_f$ (puisque δQ_f est orienté de l'eau vers la machine).

$$C\mathrm{d}T = -\delta Q_f$$

avec C la capacité thermique de l'eau et $\mathrm{d}T$ la variation infinitésimale de la température de l'eau au cours d'un cycle de la machine. On poursuit le calcul :

$$C\mathrm{d}T = -\frac{T(t)}{T_c - T(t)}\mathscr{P}\mathrm{d}t \iff \boxed{\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = -\frac{\mathscr{P}}{C}\mathrm{d}t}$$

4. On intègre cette équation différentielle entre l'instant initial et la date t à laquelle la température de l'eau atteint T_f :

$$\int_{T_c}^{T_f}\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = -\frac{\mathscr{P}}{C}\int_0^t \mathrm{d}t \iff [T_c \ln T - T]_{T_c}^{T_f} = -\frac{\mathscr{P}}{C}t$$

$$\iff T_c \ln\frac{T_f}{T_c} - T_f + T_c = -\frac{\mathscr{P}}{C}t$$

$$\iff \boxed{t = \frac{C}{\mathscr{P}}\left(T_c - T_f + T_c\ln\frac{T_c}{T_f}\right)}$$

5. Pour réaliser l'application numérique il faut d'abord évaluer la capacité thermique de l'eau liquide. On note $V = 50 \times 20 \times 0,1 = 100\,\mathrm{m^3}$ le volume total d'eau liquide à refroidir.

$$C = \rho V c = 4,2\cdot 10^8\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$$

On calcule la puissance nécessaire pour refroidir l'eau de $T_c = 278\,\mathrm{K}$ à $T_f = 273\,\mathrm{K}$ en $\Delta t = 24\,\mathrm{h}$:

$$\boxed{\mathscr{P} = \frac{C}{\Delta t}\left(T_c - T_f + T_c\ln\frac{T_c}{T_f}\right) = 49\,\mathrm{kW}}$$

6. Le fonctionnement d'une machine frigorifique est analogue à celui d'une pompe à chaleur : un transfert thermique est prélevé à la source froide tandis qu'un autre est cédé à la source chaude. Dans une installation de type {piscine + patinoire} on peut en tirer parti pour simultanément maintenir la glace de la patinoire à une température plus basse que la température ambiante et l'eau de la piscine à une température plus élevée. Dans ce cas la machine joue un double rôle de machine frigorifique pour la patinoire et de pompe à chaleur pour la piscine.

⋆⋆ Exercice 7 : Travail maximal récupérable

1. Au cours du temps le corps 2 qui fait office de source chaude se refroidit car il cède de la chaleur à la machine ($\delta Q_1 > 0$) et, comme il a une capacité thermique finie, il ne peut être assimilé à un thermostat. De la même manière, le corps1 qui fait office de source froide se réchauffe car la machine lui cède de la chaleur ($\delta Q_2 < 0$). Au bout d'un certain temps la température des deux sources finit par devenir identique ; la machine ne peut plus être qualifiée de ditherme ; elle devient **monotherme**, et l'on a vu qu'une machine monotherme ne peut pas fournir de travail au milieu extérieur sur un cycle. Par conséquent, la machine s'arrêtera nécessairement de produire du travail au bout d'un certain temps, lorsque les températures des deux sources seront identiques.

2. On applique les deux principes à la machine sur un cycle. Il n'y a pas d'entropie créée car elle fonctionne de manière réversible.

$$\begin{cases} \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 & (1) \\ \dfrac{\delta Q_1}{T_1} + \dfrac{\delta Q_2}{T_2} = 0 & (2) \end{cases}$$

On applique le premier principe aux deux sources, sur un cycle. Par convention ces sources reçoivent algébriquement des chaleurs $-\delta Q_1$ et $-\delta Q_2$:

$$C\mathrm{d}T_1 = -\delta Q_1 \qquad \text{et} \qquad C\mathrm{d}T_2 = -\delta Q_2$$

On réécrit l'équation (2) :

$$\frac{C\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{C\mathrm{d}T_2}{T_2} = C\mathrm{d}\left(\ln T_1 + \ln T_2\right) = C\mathrm{d}\left(\ln(T_1 T_2)\right) = 0$$

Cette équation écrite sous forme différentielle signifie que la quantité $\ln(T_1 T_2)$ se conserve au cours du fonctionnement de la machine, donc $T_1(t)T_2(t) = \text{Cste}$. On utilise les conditions initiales pour déterminer cette constante : $\boxed{T_1(t)T_2(t) = \text{Cste} = T_{10}T_{20}}$.

3. On a vu que la machine s'arrête lorsque les températures des deux sources sont identiques : $T_1 = T_2 = T_f$. Cette température finale vérifie :

$$T_f^2 = T_{10}T_{20} \Longleftrightarrow \boxed{T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}}$$

D'après le premier principe le travail élémentaire **reçu** par la machine sur un cycle vaut $\delta W = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = C\mathrm{d}T_1 + C\mathrm{d}T_2$. Le travail fourni est de signe opposé, on l'obtient en intégrant entre l'instant initial et l'instant t_f pour lequel la machine s'arrête de fonctionner (il peut éventuellement être infini) :

$$W_{\text{fourni}} = \int_0^{t_f} -\delta W = -\int_{T_{10}}^{T_f} C\mathrm{d}T_1 - \int_{T_{20}}^{T_f} C\mathrm{d}T_2 = -C(T_f - T_{10}) - C(T_f - T_{20}) = C\left(-2\sqrt{T_{10}T_{20}} + T_{10} + T_{20}\right)$$

On termine en simplifiant cette expression à l'aide d'une identité remarquable :

$$\boxed{W_{\text{fourni}} = C\left(\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}}\right)^2}$$

On remarque que ce travail fourni est bien positif, comme il se doit pour une machine thermique motrice.