Devoir n°29 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et soit f une application linéaire de E dans F. Pour montrer que f est bijective on peut entre autres :

(i) montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, ce qui implique que f est injective et donc bijective ;

(ii) montrer que f envoie une base de E sur une base de F ;

(iii) deviner sa réciproque, c'est-à-dire trouver une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'elle est linéaire puis qu'elle est bijective en utilisant à chaque fois les trois méthodes précédentes.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$.

2) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix}$.

3) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P(X + 1)$.

4) $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$.

EXERCICE 2

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (k fois).

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

2) a) Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$, alors $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f^{i+1}$ pour tout $i \geqslant k$. On pourra raisonner par récurrence sur i.

b) De même, montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^k$, alors $\operatorname{Im} f^{i+1} = \operatorname{Im} f^i$ pour tout $i \geqslant k$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que E est de dimension finie.

3) a) Montrer que la suite $(\dim(\operatorname{Ker} f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et en déduire qu'elle est stationnaire.

b) En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\operatorname{Ker} f^0 \subsetneq \operatorname{Ker} f^1 \subsetneq \operatorname{Ker} f^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1} = \ldots$$

où $\subsetneq$ dénote une inclusion stricte.

c) Montrer alors que :

$$\operatorname{Im} f^0 \supsetneq \operatorname{Im} f^1 \supsetneq \operatorname{Im} f^2 \supsetneq \ldots \supsetneq \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} = \ldots$$

où $A \supsetneq B$ signifie $B \subsetneq A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker} f^p$ et $\operatorname{Im} f^p$ sont supplémentaires.

4) Déterminer la valeur de p dans les cas suivants :

a) f est un automorphisme de E.

b) f est un projecteur.

c) $E = K_n[X]$ et $f(P) = P'$ pour tout $P \in K_n[X]$.

d) $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (y + z, z, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.