

Fiche d'exercices : Dénombrement

Exercice 1 Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E . Montrer que $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

Exercice 2 Dans une classe, les élèves étudient une langue vivante (anglais, allemand ou espagnol) et une langue morte (latin ou grec). 12 étudiants ont choisi l'anglais, 13 l'allemand, 16 le grec. 8 latinistes étudient l'anglais, 3 étudient l'espagnol. 6 hellénistes étudient l'allemand. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 3

- 1) De combien de manières peut-on ranger 3 objets dans 5 boîtes (on peut mettre plusieurs objets par boîte) ?
- 2) De combien de manières peut-on garer 3 voitures sur 5 places de parking ?

Exercice 4 Combien y a-t-il de nombres à cinq chiffres ? Combien y a-t-il de nombres formés de cinq chiffres distincts ? Combien y a-t-il de nombres dont les cinq chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice 5 Combien le mot ORANGE a-t-il d'anagrammes ? Et le mot ANANAS ?

Exercice 6 On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement si les livres doivent être regroupés par matière ? Si seuls les livres de maths doivent être regroupés ?

Exercice 7 On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages contenant :

- | | |
|--|---|
| a. Exactement un as. | g. Un carré. |
| b. Au moins un as. | h. Un full. |
| c. L'as de pique. | i. Deux paires (mais ni carré ni full). |
| d. Exactement un as et deux rois. | j. Une quinte flush. |
| e. Exactement une paire (pas de brelan). | k. Une couleur. |
| f. Un brelan (mais ni carré ni full). | l. Une suite. |

Exercice 8

- 1) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets ?
- 2) Quels polygones ont autant de diagonales que de côtés ?

Exercice 9 Soient n droites du plan non parallèles deux à deux et non concourantes trois à trois. Combien de points d'intersection obtient-on ? Combien de triangles ?

Exercice 10 Soit x un entier naturel dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ (les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts, les a_i sont des entiers naturels non nuls). Déterminer le nombre de diviseurs de x .

Exercice 11 On veut placer n couples autour d'une table. Combien y a-t-il de dispositions possibles :

- | | |
|---|----------------------------------|
| a. au total ? | c. ne séparant pas les couples ? |
| b. alternant les hommes et les femmes ? | d. vérifiant à la fois b et c ? |

Exercice 12 Soit n un entier naturel fixé.

- 1) Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (p, q) tels que $p + q = n$.
- 2) Déterminer le nombre de triplets d'entiers naturels (p, q, r) tels que $p + q + r = n$.

Exercice 13 Soit n un entier naturel fixé.

- 1) Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (p, q) tels que $p \leq n$ et $q \leq n$.
- 2) Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (p, q) tels que $p + q \leq n$.
- 3) Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (p, q) tels que $n \leq p + q \leq 2n$.

Exercice 14

- 1) Quel est le coefficient de $x^4 y^3 z^2$ dans le développement de $(x + y + z)^9$?
- 2) Plus généralement, établir la formule du trinôme :

$$(x + y + z)^n = \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = n} \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

Exercice 15 Établir la formule de Vandermonde $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$:

- 1) En développant $(x + y)^{m+n}$.
- 2) Par un raisonnement ensembliste.

Exercice 16 Soit E un ensemble de cardinal n .

- 1) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
- 2) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- 3) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$.
- 4) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

Exercice 17 Soit E un ensemble de cardinal n . Calculer $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(A)$.

Exercice 18 (*Formule du crible*) Montrer que si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'ensembles finis, alors :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|.$$