

Fiche d'exercices : Probabilités

Exercice 1 Soient A , B et C trois événements d'un univers Ω . Traduire en termes d'opérations ensemblistes les événements suivants :

1. Les trois événements se produisent.
2. Aucun des trois événements ne se produit.
3. Au moins un des trois événements se produit.
4. Exactement un des trois événements se produit.
5. Au plus deux des trois événements se produisent.
6. Au moins deux des trois événements se produisent.

Exercice 2 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P) . Montrer que $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$.

Exercice 3 Soient A , B et C trois événements d'un espace probabilisé. Montrer que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 4 Un dé à six faces a été truqué de telle sorte que les nombres pairs ont deux fois plus de chances d'apparaître que les nombres impairs. Calculer la probabilité d'apparition de chacune des faces.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{1, \dots, n\}$. Soit P une probabilité sur Ω telle que, pour tout $k \in \Omega$, $P(\{k\}) = \alpha k$. Que vaut α ?

Exercice 6 Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour que la probabilité d'obtenir un 6 soit supérieure ou égale à $1/2$?

Exercice 7 On tire sans remise cinq cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité que la dernière carte, et elle seule, soit un as ?

Exercice 8 On lance 3 fois un dé et on note a , b et c les résultats obtenus. Quelle est la probabilité que le polynôme $aX^2 + bX + c$ ait une racine double ? Deux racines réelles ? Aucune racine réelle ?

Exercice 9 On range au hasard six objets dans trois boîtes. Calculer la probabilité que chaque boîte contienne exactement deux objets.

Exercice 10 Une urne contient cinq boules blanches, huit boules rouges et sept boules vertes. On en tire simultanément trois. Calculer les probabilités :

1. d'avoir trois boules de couleurs différentes,
2. d'avoir exactement deux boules rouges,
3. d'avoir trois boules de la même couleur.

Reprendre l'exercice en supposant que le tirage se fait avec remise.

Exercice 11 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$.

1) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance n fois et on obtient n fois 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 12 On considère trois pièces truquées : les probabilités qu'elles tombent sur pile sont 0,1, 0,4 et 0,6 respectivement. On choisit une pièce au hasard et on la lance trois fois. Sachant qu'on a obtenu deux fois pile et une fois face (dans cet ordre), quelle est la probabilité qu'on ait lancé la première pièce ?

Exercice 13 $N + 1$ urnes sont numérotées de 0 à N . L'urne numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on en tire n boules (tirage avec remise).

- 1) Quelle est la probabilité $p_{n,N}$ d'obtenir n boules blanches ? Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_{n,N}$.
- 2) Si les n boules obtenues sont blanches, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne numéro k ?
- 3) On tire une $(n + 1)^e$ boule de l'urne. Si les n premières sont blanches, quelle est la probabilité $q_{n,N}$ que la $(n + 1)^e$ le soit aussi ? Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_{n,N}$.

Exercice 14 En Picardie, s'il fait beau un jour, il y a 2 chances sur 5 qu'il fasse mauvais le lendemain. S'il fait mauvais un jour, il y a 1 chance sur 3 qu'il fasse beau le lendemain. Aujourd'hui il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans n jours ?

Exercice 15 Trois footballeurs A , B et C se font des passes. Lorsqu'il reçoit la balle, chacun d'eux la renvoie équiprobablement à l'un des deux autres. C'est A qui a la balle au départ. Calculer la probabilité pour chacun d'eux d'avoir le ballon après la n^e passe.

Exercice 16 On lance un dé non pipé à 12 faces. Les événements A : "Le nombre obtenu est pair" et B : "Le nombre obtenu est un multiple de 3" sont-ils indépendants ? Et pour un dé à 10 faces ?

Exercice 17 On lance trois fois une pièce non truquée. On note A_{ij} l'événement : le résultat du i^e tirage est égal au résultat du j^e tirage. Les événements A_{12} , A_{13} et A_{23} sont-ils indépendants ?

Exercice 18 Un circuit électrique est formé de trois composants C_1 , C_2 et C_3 dont les probabilités de fonctionnement sont p_1 , p_2 et p_3 respectivement et de fonctionnements indépendants les uns des autres. Déterminer la probabilité de fonctionnement du circuit :

1. lorsque les composants sont placés en série,
2. lorsque les composants sont placés en parallèle,
3. lorsque C_1 est placé en série avec le sous-circuit formé de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 19 Soit Ω un univers de cardinal p où p est premier. Montrer que, pour la probabilité uniforme, deux événements non triviaux ne peuvent pas être indépendants.