Devoir n°31 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit E un K-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q + q \circ p = 0$.

1) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.

2) Montrer que $p + q$ est un projecteur.

3) Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

4) Montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

EXERCICE 2

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On en tire trois au hasard.

1) Dans cette question, le tirage se fait sans remise.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles si on tient compte de l'ordre ? Si on n'en tient pas compte ?

b) Quelle est la probabilité que les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5 ?

c) Quelle est la probabilité que la somme des numéros des trois boules soit égale à 6 ?

2) Dans cette question, le tirage se fait avec remise.

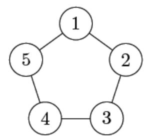
a) Combien y a-t-il de tirages possibles (on tient compte de l'ordre) ?

b) Quelle est la probabilité que les trois boules portent un numéro inférieur ou égal à 5 ?

c) Quelle est la probabilité que la somme des numéros des trois boules soit égale à 6 ?

EXERCICE 3

Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme sur le dessin ci-contre. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.



À l'instant $n = 0$, les deux personnes se trouvent respectivement dans les pièces 1 et 2. Elles se déplacent alors selon les règles suivantes :

– à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité 1/2 ;

– les déplacements des deux personnes se font simultanément ;

– les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;

– on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;

– les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement “les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements”, B_n l'événement “les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou 1 et 5) après n déplacements” et C_n l'événement “les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou 1 et 4) après n déplacements”. On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

1) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0 puis calculer a_1, b_1 et c_1.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$ (un arbre n'est pas une justification suffisante, on utilisera un théorème (à préciser) dont on vérifiera les hypothèses).

3) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux $b_{n+2} = \dfrac{5}{4}b_{n+1} - \dfrac{5}{16}b_n$.

4) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

5) Les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation. Les expressions de c_n et a_n en fonction de n ne sont pas demandées.