Fiche d'exercices : Matrices et applications linéaires

Exercice 1 Écrire la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes et déterminer leurs rangs, leurs noyaux et leurs images :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-y, x)$.
2. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = (P(1), P(2))$.
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = (X + a)P' - (X^2 - a)P''$.
4. $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = XP' - aP$.
5. $f : \mathcal{M}_2(K) \to \mathcal{M}_2(K)$ définie par $f(A) = {}^tA$.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{-x}$, $f_2 : x \mapsto e^x \cos x$ et $f_3 : x \mapsto e^x \sin x$. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(f) = f'$.

1) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F et que F est stable par D.

2) On note $\widehat{D}$ l'endomorphisme de F induit par D. Écrire la matrice de $\widehat{D}$ dans la base (f_1, f_2, f_3) et en déduire que $\widehat{D}$ est un automorphisme de F.

Exercice 3 Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite dirigée par $u = (1, 2, 3)$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1) Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, en déduire la nature de f et déterminer ses éléments caractéristiques.

2) Mêmes questions avec l'endomorphisme g de matrice $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = P(1 - X)$. Montrer que φ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques, puis trouver une base dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 6 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X + 1)$. Écrire sa matrice M dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Exercice 7 Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & 4-a & a \\ a & a+2 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix} \;;\; (i \times j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Exercice 8 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M^{n+1} = 0$. Montrer que $M^n = 0$.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$.

1) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

2) Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice dans toute base de E est diagonale.

Exercice 11 Soit $A, B \in \mathcal{M}_3(K)$ telles que $AB = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ ou $\mathrm{rg}(B) \leqslant 1$.

Exercice 12 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$ telles que $M = AB$.

Exercice 13 Vérifier que les familles de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = ((1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 0, -2))$ et $\mathcal{B}' = ((2, -1, 4), (3, 1, -1), (1, 1, -2))$ sont des bases et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 14 Déterminer la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(1, -1) = (-1, -2, 5)$ et $f(2, -3) = (0, 5, 4)$.

Exercice 15 Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par $\varphi(P) = (X+1)P - X^2P'$.

1) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Montrer que les familles $\mathcal{B}' = (X + 1, X - 1, X^2)$ et $\mathcal{C}' = (X^3 + X^2, X^2 + X, X + 1, 1)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}_3[X]$ respectivement et écrire la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 16 Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 17

1) Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

2) La trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie E est la trace de sa matrice dans une base quelconque de E. Montrer que cette définition a un sens.

3) Montrer que le rang d'un projecteur en dimension finie est égal à sa trace.

Exercice 18 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

2) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonale.

3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.