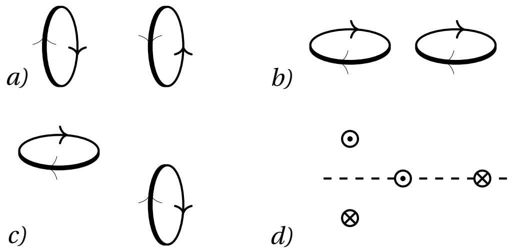
TD 29 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable

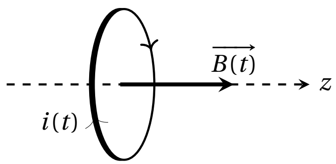
⋆ Exercice 1 : Conventions d'orientation

Dans les exemples ci-dessous, déterminer le signe de l'inductance mutuelle entre les deux circuits :



⋆ Exercice 2 : Courant induit dans une bobine

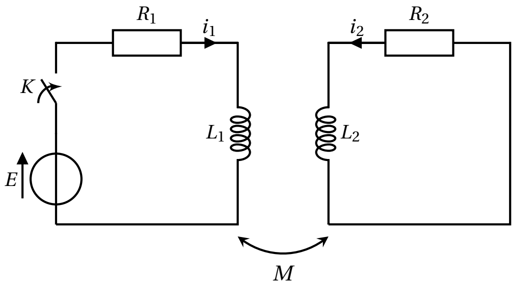
Une boucle de courant plane indéformable, de résistance R, de section S, d'inductance négligeable, est plongée à $t = 0$ dans un champ magnétique extérieur uniforme variable $\vec{B} = B_0 e^{-t/\tau}\,\vec{u}_z$ colinéaire à l'axe de symétrie de révolution de la boucle (voir schéma ci-contre).



1. Exprimer l'intensité $i(t)$ qui parcourt la boucle.
2. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t = \infty$.

⋆⋆ Exercice 3 : Régime transitoire dans deux circuits couplés

Soient deux circuits couplés. Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif ($M > 0$), $L_1 = L_2 = L$ et $R_1 = R_2 = R$. La fem E est constante. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

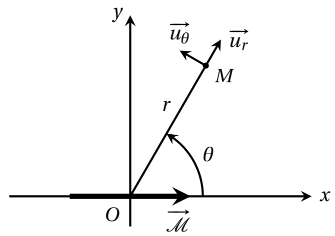


1. Écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. Déterminer deux équations différentielles découplées vérifiées par $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$.
3. Déterminer $S(t)$ et $D(t)$ puis $i_1(t)$ et $i_2(t)$, dans le cas où M est strictement inférieur à L.
4. Reprendre ce dernier calcul dans le cas limite d'un couplage parfait ($L = M$).

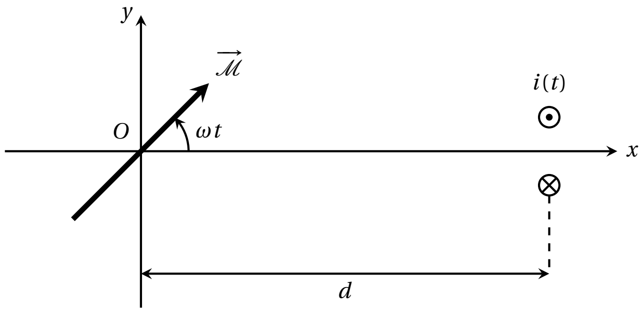
⋆⋆ Exercice 4 : Couple de freinage par induction

Dans cet exercice, on utilisera le résultat (admis) suivant. Un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ crée en tout point de l'espace un champ magnétique dont l'expression en coordonnées polaires est la suivante (la direction $\theta = 0$ est prise dans le sens de $\vec{\mathcal{M}}$) :

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$



Un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, situé à l'origine d'un plan horizontal (Oxy) est mis en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport à l'axe (Oz). Une spire circulaire de rayon a, de résistance R et d'inductance négligeable est placée à une distance $d \gg a$ du point O (voir schéma ci-dessous).



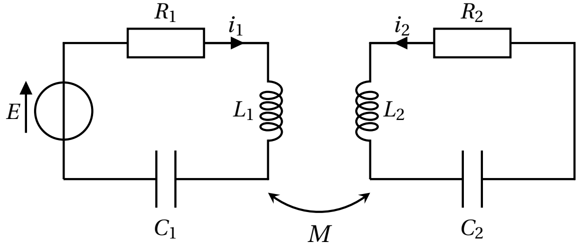
1. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ au niveau du centre de la spire, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (attention : on remarquera qu'avec les conventions d'orientation des schéma ci-dessus, $\theta = -\omega t$).
2. On suppose que la spire est suffisamment petite pour considérer le champ magnétique uniforme sur toute sa section. Exprimer le flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers la spire.
3. Exprimer le courant $i(t)$ qui traverse la spire.
4. Sachant que le champ magnétique créé par la spire circulaire en un point M de son axe situé à une distance $\ell \gg a$ de son centre vaut $\vec{B} \simeq \dfrac{\mu_0 a^2}{2\ell^3}\,i(t)\,\overrightarrow{u_x}$, exprimer le champ magnétique $\vec{B}'$ créé par la spire au point O.
5. En déduire le couple $\vec{\Gamma}$ exercé par la spire sur le moment magnétique. Interpréter le résultat.
6. Exprimer enfin la puissance moyenne $\mathscr{P}$ que doit fournir un opérateur pour maintenir la vitesse angulaire du moment magnétique constante.

⋆⋆ Exercice 5 : Système de détection

On modélise un système de détection antivol de la manière suivante. Le détecteur est assimilé à un circuit RLC série fixe et alimenté par une fem sinusoïdale $E(t) = E\cos(\omega t)$. On place sur l'objet à protéger un circuit électronique que l'on assimile également à un circuit RLC série. Pour simplifier, on prendra $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$.

Lorsque l'objet passe à proximité du détecteur, le couplage entre les deux bobines n'est plus négligeable et on note M le coefficient d'inductance mutuelle entre les bobines (on prendra arbitrairement $M > 0$).

La pulsation ω est choisie de manière à ce qu'il y ait résonance en intensité dans le détecteur lorsque l'objet est très éloigné ($M = 0$). Dans cet exercice, on négligera les effets dûs au mouvement relatif du détecteur et du circuit mobile.

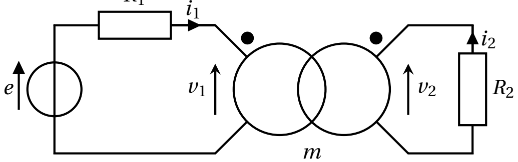


1. Exprimer ω en fonction des données du problème.
2. On pose $i_1(t) = \mathscr{R}e\left[\underline{I_1}e^{j\omega t}\right]$ avec $\underline{I_1} = I_{1m}e^{j\varphi}$.

   Exprimer I_{1m} lorsque l'objet est très éloigné du détecteur.
3. Exprimer I'_{1m} lorsqu'on tient compte de l'inductance mutuelle (objet à proximité du détecteur).
4. Dans le cas où $M \ll L$, exprimer $\dfrac{\Delta I_{1m}}{I_{1m}} = \dfrac{\left|I'_{1m} - I_{1m}\right|}{I_{1m}}$ en fonction de M, L et du facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.
5. AN : $R = 50\,\Omega$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$, $L = 100\,\text{mH}$, $M = 0{,}1\,\text{mH}$.

⋆⋆ Exercice 6 : Adaptation d'impédance

Un générateur de tension de f.e.m alternative e, alimente le primaire d'un transformateur idéal à travers une résistance R_1.



À quelle condition sur le rapport de transformation m, la puissance absorbée par la résistance R_2 au secondaire est-elle maximale ?

Solutions :

Ex2 : 1. $i(t) = -\dfrac{B_0 S}{\tau R}e^{-t/\tau}$ 2. $W_J = \dfrac{B_0^2 S^2}{2\tau R}$

Ex3 : 3. $i_1(t) = \dfrac{E}{2R}\left[2 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right]$ $i_2(t) = \dfrac{E}{2R}\left[e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1}\right]$

avec $\tau_1 = \dfrac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L-M}{R}$

4. $i_1(t) = \dfrac{E}{2R}\left[2 - e^{-t/\tau_1}\right]$ $i_2(t) = -\dfrac{E}{2R}e^{-t/\tau_1}$

Ex4 : 1. $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0\mathscr{M}}{4\pi d^3}\left(2\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x} - \sin(\omega t)\,\overrightarrow{u_y}\right)$ 2. $\Phi = \dfrac{\mu_0 a^2\mathscr{M}}{2d^3}\cos\omega t$

3. $i(t) = \dfrac{\mu_0 a^2\mathscr{M}\omega}{2d^3 R}\cos\omega t$ 4. $\overrightarrow{B'} = \dfrac{\mu_0^2 a^4\mathscr{M}\omega}{4d^6 R}\sin\omega t\,\overrightarrow{u_x}$

5. $\overrightarrow{\Gamma} = -\dfrac{\mu_0^2 a^4\mathscr{M}^2\omega}{4d^6 R}\sin^2\omega t\,\overrightarrow{u_z}$ 6. $\mathscr{P} = \dfrac{\mu_0^2 a^4\mathscr{M}^2\omega^2}{8d^6 R}$

Ex5 : 1. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 2. $I_{1m} = \dfrac{E}{R}$ 3. $I'_{1m} = \dfrac{I_{1m}}{1 + \dfrac{M^2}{R^2 LC}}$

4. $\dfrac{\Delta I_{1m}}{I_{1m}} = \left(\dfrac{QM}{L}\right)^2$ 5. $\dfrac{\Delta I_{1m}}{I_{1m}} = 4\cdot 10^{-4}$

Ex6 : $m = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$