DS de physique n° 8

Durée : 3h

*L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et **les résultats soulignés ou encadrés**. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.*

Exercice 1 : La troposphère vue comme une machine thermique

La troposphère est la couche de l'atmosphère comprise entre le sol et une altitude d'environ 10 km. Elle est dynamique, c'est-à-dire parcourue par des vents et courants atmosphériques. On se propose d'étudier l'un d'entre eux, appelé "cellule de Hadley", qui est le principal courant méridional de l'atmosphère au voisinage de l'équateur (voir figure 3).

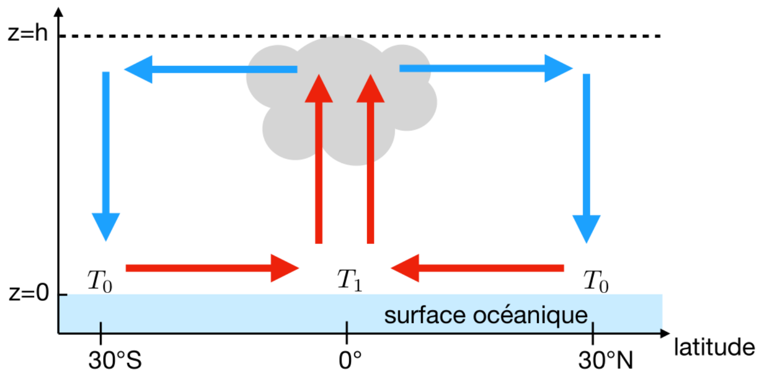


Figure 3: La circulation de Hadley correspond aux mouvements atmosphériques dominants dans un plan méridional (latitude - altitude). La température de surface au niveau de l'océan est supérieure au voisinage de l'équateur (T_1) qu'aux latitudes subtropicales ($T_0 < T_1$). Les flèches illustrent la direction dominante du vent.

La troposphère est alimentée en énergie par le flux solaire et une partie de cette énergie, convertie en énergie mécanique, donne naissance à des vents (l'***alizé*** pour la cellule de Hadley). On modélise le courant atmosphérique représenté sur la figure 3 par une machine thermique cyclique. La thermodynamique nous permet alors de déterminer une borne supérieure sur la fraction du transfert thermique incident qui est transformée en travail mécanique sous la forme de vents. Dans ce but, on revient dans un premier temps sur le fonctionnement et le rendement des moteurs dithermes cycliques. Pour les applications numériques demandées dans les deux dernières questions de cette partie, on considérera la Terre comme une sphère dont le rayon vaut approximativement 6400 km.

1. On considère tout d'abord un moteur ditherme cyclique en interaction avec un thermostat chaud de température T_c et un thermostat froid de température T_f. Définissez le rendement ξ de ce moteur. Établissez la valeur théorique maximale ξ_c de ce rendement (le rendement de Carnot), atteinte si les transformations associées au cycle sont réversibles.

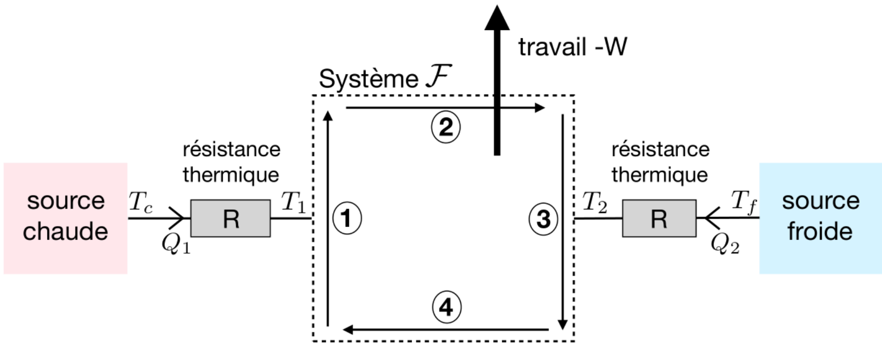


Figure 4: Une machine cyclique est connectée aux sources chaude et froide par le biais de résistances thermiques. Le système $\mathcal{F}$ subit alors de façon cyclique les 4 étapes décrites dans le texte, représentées schématiquement par les chiffres entourés.

Une machine thermique entièrement réversible n'est pas un bon modèle d'une machine réelle : les processus mis en jeu doivent être infiniment lents, en particulier les transferts thermiques. Si le travail fourni par la machine est non nul, ce travail est fourni en un temps infini ! Autrement dit, la puissance engendrée (travail fourni par unité de temps) tend vers zéro dans la limite de transformations parfaitement réversibles. Pour résoudre ce problème on considère la situation représentée sur la figure 4. La machine comprend un fluide, le système F à l'intérieur du cadre pointillé, qui subit de façon cyclique 4 transformations :

1. Une étape isotherme, à température T_1, pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique Q_1 depuis le thermostat chaud, à température T_c. Le thermostat est connecté au système par une résistance thermique R. Cette étape est supposée durer un temps τ. On notera que la température au voisinage immédiat du système F (au bord du domaine pointillé) est bien T_1 : c'est la température effective de la source chaude pour le système F.

2. Une détente adiabatique rapide du fluide. Si nécessaire, une telle détente peut être effectuée rapidement tout en restant réversible (il suffit que le temps soit long devant le temps de propagation des ondes sonores dans le fluide). Sa durée est donc négligeable par rapport au temps τ.

3. Une étape isotherme, à température T_2, pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique Q_2, à travers une résistance thermique R, depuis un thermostat froid à température T_f. Cette étape dure un temps τ égal à celui de l'étape 1. On notera encore une fois que la température au voisinage immédiat du système F est T_2 : c'est la température effective de la source froide pour le système F.

4. Une compression adiabatique rapide du fluide (qui peut néanmoins être réversible, si nécessaire), dont la durée est négligeable par rapport au temps τ.

On note W le travail algébrique reçu par le système pendant un cycle. Les températures des thermostats T_c et T_f sont fixées, mais on suppose que l'on peut ajuster les températures de fonctionnement T_1 et T_2 du moteur pour obtenir un fonctionnement optimal.

2. Une résistance thermique s'exprime en $\mathrm{K \cdot W^{-1}}$. Par analogie avec la loi d'Ohm électrique et en raisonnant par analyse dimensionnelle, proposer une relation, appelée *loi d'Ohm thermique*, entre R, T_1, T_c, Q_1 et τ puis entre R, T_2, T_f, Q_2 et τ. Ces relations seront écrites en **convention récepteur** (on notera que dans cette analogie les températures jouent le même rôle que les potentiels électriques).

3. Donnez les signes de Q_1, Q_2 et W dans ce qui vous semble être le régime de fonctionnement normal du moteur. Ordonnez les températures T_c, T_f, T_1 et T_2 dans ce régime de fonctionnement, en justifiant très brièvement. On supposera cet ordre des températures respecté dans la suite.

4. Définissez la puissance motrice P fournie par le moteur en moyenne sur la durée totale d'un cycle. Exprimez P en fonction de R, T_1, T_2, T_f et T_c.

5. À l'aide du second principe de la thermodynamique, établir une inégalité entre T_1, T_2, T_f et T_c. Pour simplifier les calculs, on admet que le rendement maximal est obtenu lorsque les transformations sont réversibles *pour le système F*. On remplacera alors cette inégalité par une égalité dans ce qui suit.

6. À l'aide des réponses aux deux questions précédentes, éliminez T_2 pour exprimer la puissance P sous la forme :

$$P = \frac{T_c}{2R} \times f(X, \eta) \ , \tag{1}$$

où l'on a introduit les paramètres $X = T_1/T_c$ et $\eta = T_f/T_c$.

7. À l'aide des réponses aux questions précédentes, montrez que $X > 1/2$.

8. En pratique, les moteurs réels fonctionnent dans un régime où T_1 (et donc T_2) est choisie pour maximiser la puissance motrice délivrée, à T_c et T_f fixées. Calculez la valeur X_+ de X associée à ce maximum, en fonction de η. Donnez la valeur du maximum de puissance en fonction de R, T_c et η.

9. Donnez l'expression du rendement ξ du moteur en fonction de X et η. Montrez que le rendement du moteur à puissance maximale vaut $\xi(X_+) = 1 - \eta^{1/2}$. Comment cette expression du rendement se compare-t-elle au rendement de Carnot ?

10. La différence de valeur entre ces deux rendements signifie que certains processus apparaissant sur la figure 4 sont irréversibles. Quels sont-ils ? On définit le taux de création d'entropie $\dot{\mathscr{S}}$ comme le rapport de l'entropie créée par ces processus irréversibles pendant un cycle divisée par la durée d'un cycle. En appliquant le second principe de la thermodynamique à un système judicieusement choisi, calculez $\dot{\mathscr{S}}$ en fonction de R et η dans le régime de fonctionnement à puissance maximale du moteur.

On souhaite appliquer le modèle précédent aux courants atmosphériques. Le système est la totalité de la troposphère, que l'on considère comme une couche de fluide de hauteur $h = 10\,\mathrm{km}$ à la surface de la Terre, et de densité $\rho = 1\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ considérée constante pour ces calculs d'ordre de grandeur. Le transfert thermique Q_1 reçu par la troposphère est dû au rayonnement solaire incident qui atteint la surface terrestre. Ce rayonnement a une intensité $I = 220\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ en moyenne sur une journée et sur toute la surface de la Terre. Q_2 correspond alors au transfert thermique sous forme de rayonnement infrarouge émis au niveau du sommet de la troposphère (on néglige la stratosphère), tandis que $|W|$ est l'énergie qui est transformée en travail moteur sous la forme de vents, ou courants atmosphériques. La température moyenne au niveau du sol est $T_f = 290\,\mathrm{K}$, tandis que la température moyenne au sommet de la troposphère est $T_c = 220\,\mathrm{K}$.

11. En supposant que le système fonctionne à puissance maximale, calculez approximativement l'énergie cédée aux vents et courants atmosphériques par unité de temps (On rappelle que l'aire de la surface d'une sphère de rayon R vaut $\mathscr{A} = 4\pi R^2$).

12. On admet que les courants atmosphériques ainsi engendrés dissipent leur énergie cinétique à un taux $\mathscr{D}$ (énergie dissipée par unité de temps), de l'ordre de $\mathscr{D} \simeq 0{,}05 \times \mathscr{M} U^3/h$, où $\mathscr{M}$ est la masse totale de la troposphère et U la vitesse typique des courants atmosphériques. En déduire un ordre de grandeur de U. Commentez.

Exercice 2 : Le dermographe, machine à tatouer électrique

Le dermographe est composé de plusieurs éléments :

- une partie mobile attachée au support via une lame métallique à l'origine d'un couple de rappel ;
- des bobines avec des noyaux ferromagnétiques, générant un champ magnétique.

Il est par ailleurs alimenté par un générateur, généralement contrôlé par le tatoueur via une pédale.

Le principe du dermographe repose sur l'alternance entre deux phases. Dans un premier temps, la partie mobile est en contact avec la vis. Ce contact permet de fermer le circuit électrique alimenté par le générateur et formé par les bobines, la partie mobile et le support. Si le générateur fonctionne, un courant circule dans le circuit et en particulier dans les bobines. Un champ magnétique est alors créé par les bobines, ce qui génère une force sur la partie mobile, vers le bas.
Dans un second temps, la partie mobile se décolle de la vis de contact, ouvrant le circuit. La force magnétique disparaît et la force de rappel ramène la partie mobile vers la position de contact.
L'aiguille, accrochée à l'extrémité de la partie mobile, aura donc un mouvement périodique de haut en bas et de bas en haut.

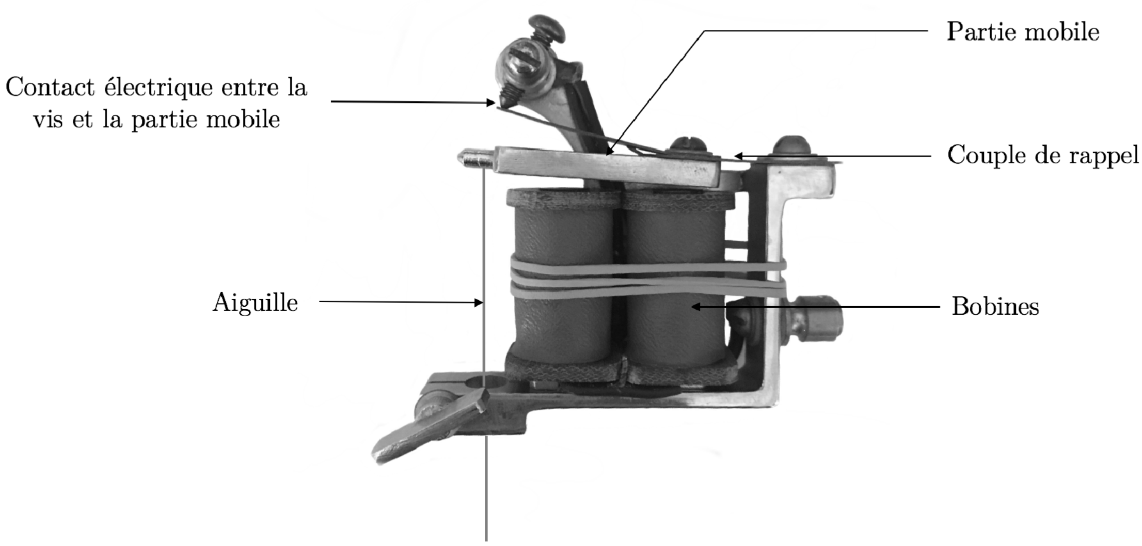


Figure 1 Dermographe

Champ magnétique créé par une bobine

On considère dans un premier temps une bobine assimilée à un solénoïde d'axe (Oz), avec un nombre de spires par unité de longueur n et parcourue par un courant d'intensité i stationnaire.

1. Tracer l'allure des lignes de champ magnétique pour une bobine infinie, puis pour une bobine de longueur finie. Décrire les variations du champ magnétique dans les deux cas.

2. Donner l'expression du champ magnétique produit en tout point de l'espace dans le cas d'une bobine infinie.

Dans la suite, on suppose que la partie mobile se situe toujours dans une zone où le champ peut être considéré comme uniforme.

Fonctionnement du dermographe simplifié

Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse, dans cette sous-partie, à une version modifiée du dermographe.

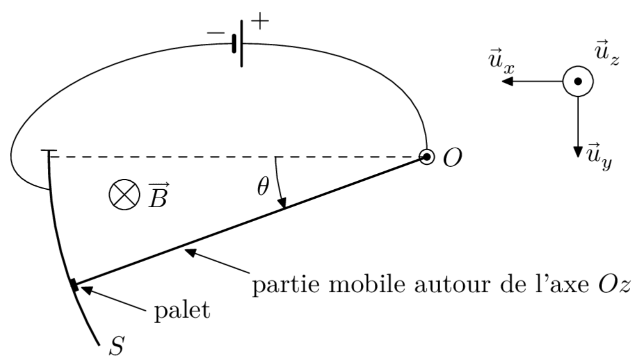


Figure 2 Modélisation simplifiée du dermographe

On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un palet à son extrémité. Au point $S\,(\theta_S = \pi/60)$, l'arc de cercle se termine. On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité I et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$ avec $B > 0$. Elle est soumise à un couple de rappel $\Gamma = -K\theta$. Il est rappelé que différentes valeurs numériques utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu. Par ailleurs, on néglige les effets d'induction liés au mouvement de la partie mobile dans le champ magnétique extérieur.

3. Recopier sur la copie le schéma de la figure 2 en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant. Donner le nom et l'expression de cette force.

Situation initiale

4. Initialement ($t = 0^-$), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.

Mise sous tension (contact assuré)

5. On met le générateur sous tension à $t = 0^+$. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile.

6. Montrer que θ satisfait l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A$ et exprimer ω_0 et A en fonction de J, K, I, B et ℓ.

7. Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression trouvée pour A.

8. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $\theta(t)$ tant que le contact est assuré.

9. Lorsqu'on insère un matériau ferromagnétique dans une bobine, on modifie l'expression du champ créé en le multipliant par μ_r, perméabilité magnétique relative du milieu. En reprenant l'expression du champ magnétique obtenu pour la bobine infinie parcourue par le courant d'intensité I, et sachant qu'on ajoute un matériau de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 500$, quelle doit être la valeur maximale du coefficient de rappel K pour qu'il puisse ne plus exister de contact entre la partie mobile et l'arc conducteur ? Vérifier que la valeur donnée dans l'énoncé satisfait à cette condition, sachant que l'intensité circulant généralement dans les dermographes est d'environ 1 A et que les bobines ont un nombre de spires par unité de longueur $n = 2 \cdot 10^3 \,\mathrm{m}^{-1}$.

10. Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.

Rupture du contact fermant le circuit

On pose $t' = t - t_1$. À $t' = 0$, la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.

11. Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par θ. La résoudre pour déterminer $\theta(t')$ tant que le contact est rompu.

12. On admet que la valeur de l'angle maximal atteint par la partie mobile est de $0{,}096\,\mathrm{rad}$. En déduire l'amplitude du mouvement de l'aiguille.

Résumé

13. Parmi les 4 courbes de la figure 3, choisir, en justifiant, celle représentant θ en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.

Caractéristiques du dermographe

Longueur de la partie mobile	$\ell = 3\,\mathrm{cm}$
Moment d'inertie de la partie mobile	$J = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$
Coefficient de rappel	$K = 7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$
Angle du point extrême de la partie conductrice	$\theta_S = \pi/60$
Nombre de spires par unité de longueur de la bobine	$n = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique relative du matériau inséré dans la bobine	$\mu_r = 5 \cdot 10^2$

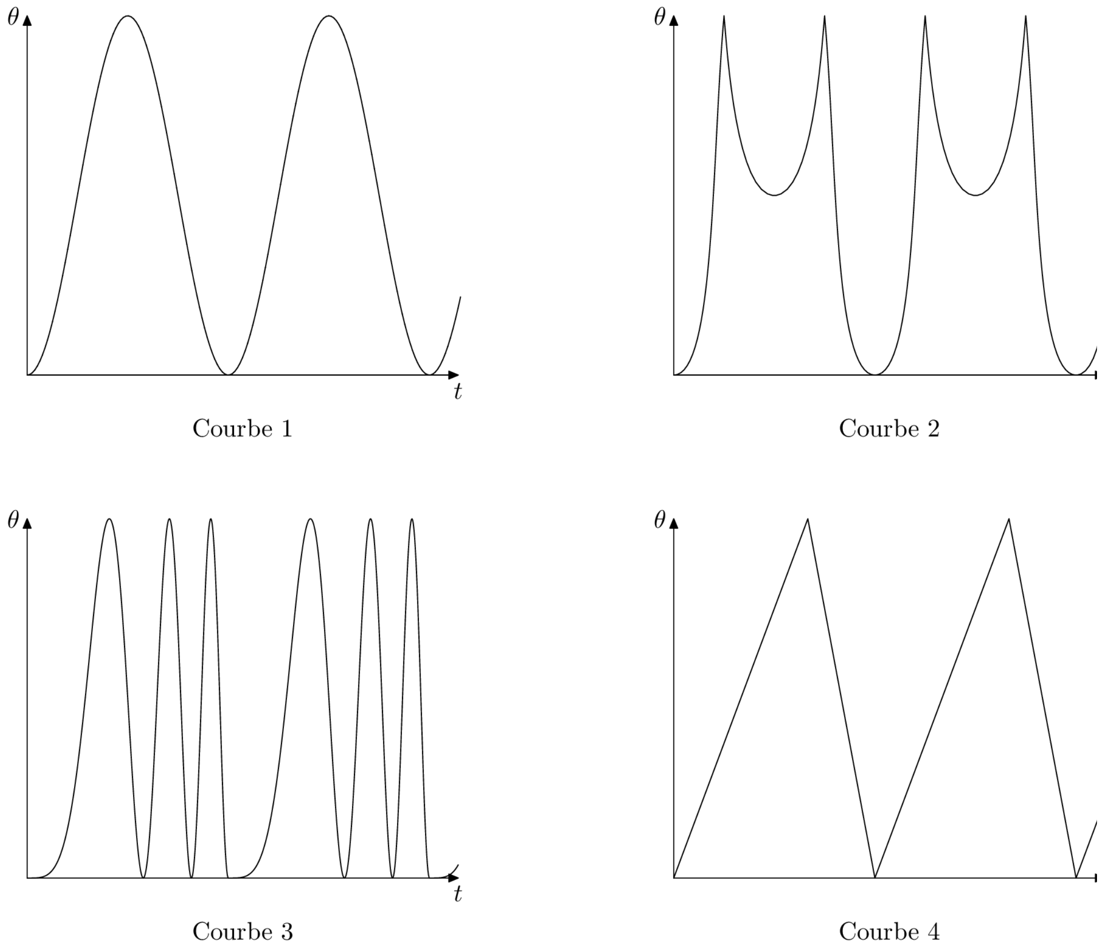
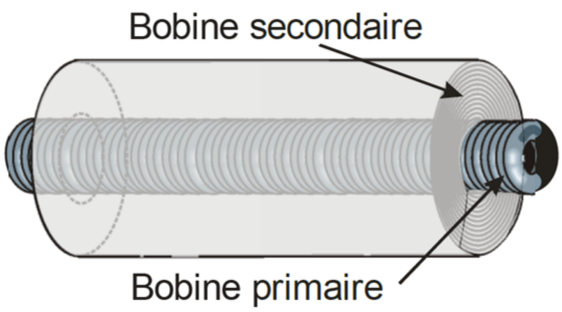


Figure 3 Profils de θ en fonction du temps

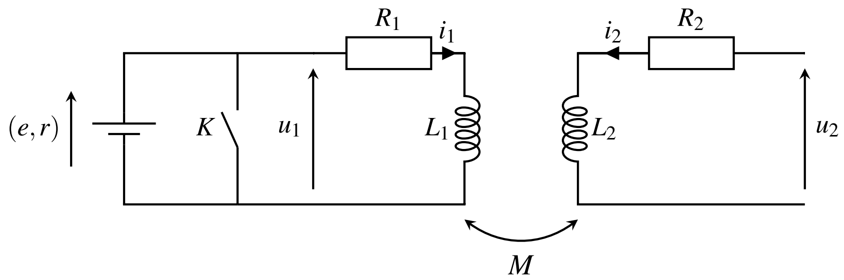
Exercice 3 : Bobine de Ruhmkorff

Jules Verne utilise dans ses romans les dernières innovations technologiques de son temps. Ainsi, dans « Voyage au centre de la Terre », les explorateurs utilisent des lampes à décharge alimentées par des appareils de Ruhmkorff, conçus par Heinrich Ruhmkorff vers 1850. Cette exercice est consacré à l'étude de ce type d'appareil, dont le fonctionnement est basé sur le phénomène d'induction.

Fondé sur l'induction volta-électrique, l'appareil de Ruhmkorff se compose d'une bobine isolante sur laquelle se trouvent enroulés deux fils, l'un gros communiquant avec la pile, c'est le circuit primaire, l'autre fin dans lequel doit circuler le courant induit, c'est le circuit secondaire ; ce dernier atteint, dans certains appareils, une longueur de 150 000 m et se trouve superposé à l'autre. On obtient les courants induits en établissant dans l'inducteur des interruptions successives.



On modélise sur la figure ci-dessous l'appareil de Ruhmkorff qui alimente la lampe à décharge. Une pile au bichromate de potassium délivre une tension continue de valeur $2\,\mathrm{V}$; elle est modélisée par l'association série d'une source idéale de tension de force électromotrice e et d'un résistor de résistance r. Pour ioniser le gaz à l'intérieur de la lanterne, une tension de plusieurs milliers de volts peut être nécessaire. Pour générer une telle tension, on utilise un appareil de Ruhmkorff qui est un transformateur élévateur de tension. Le transformateur est caractérisé par ses coefficients d'inductances, L_1 est l'inductance propre du primaire, L_2 celle du secondaire et M est le coefficient d'inductance mutuelle. La tension u_2 est appliquée aux bornes de la lanterne.



Dans un premier temps la lanterne est éteinte, donc $i_2(t) = 0$, et l'interrupteur K est ouvert.

1. La tension $u_1(t)$ possédant la valeur U_0 depuis longtemps, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$, u_1 passe alors instantanément de U_0 à 0. Déterminer l'expression de $i_1(t)$ pour $t > 0$.

2. Déterminer l'expression de $u_2(t)$ pour $t > 0$ et déterminer sa valeur maximale U_2. À quel instant est-elle obtenue ?

3. À quelle condition sur $u_2(t)$ la lanterne s'allume-t-elle ? En déduire la nécessité d'interruptions successives à l'aide de l'interrupteur K.

Remarque : il est possible de réaliser des interruptions périodiques à l'aide d'un électroaimant et d'un montage semblable à celui du dermographe présenté dans l'exercice 2.

4. On suppose que la lanterne contient du diazote sous faible pression (quelques Pa). À l'aide du document ci-dessous, estimer la valeur de l'inductance L_2 de la bobine du circuit secondaire nécessaire à l'allumage de cette lanterne. On prendra $L_1 = 5\,\mathrm{mH}$. Commenter l'ordre de grandeur de la valeur de l'inductance L_2 trouvée.
Cette question demande de l'initiative, on présentera clairement les simplifications ou hypothèses effectuées.

Document 4.4 : courbe de Paschen donnant la tension de claquage en fonction du produit (pression du gaz × distance) entre les électrodes (Wikipedia) (1 Torr = 133,3 Pa)