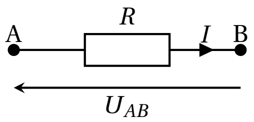
Corrigé DS8

Exercice 1 : La troposphère vue comme une machine thermique

1. Voir cours.

2. Considérons la résistance électrique ci-dessous :



La loi d'Ohm électrique s'écrit, en convention récepteur :

$$U_{AB} = V_A - V_B = RI$$

Par analogie, la loi d'Ohm thermique s'écrit, en convention récepteur et du côte de la source chaude, sous la forme :

$$\boxed{T_c - T_1 = R\frac{Q_1}{\tau}}$$

Le terme Q_1/τ est homogène à une puissance. La relation ci-dessus est bien homogène. De la même manière, on écrira du côté de la source froide :

$$\boxed{T_f - T_2 = R\frac{Q_2}{\tau}}$$

3. Dans le régime de fonctionnement normal d'un moteur thermique, la source chaude alimente le moteur en énergie thermique. Une partie de cette énergie est convertie en travail, fourni au milieu extérieur, le reste est dissipé dans la source froide. Par conséquent :

$$\boxed{Q_1 > 0} \;,\; \boxed{Q_2 < 0} \;,\; \boxed{W < 0}$$

L'application de l'équivalent thermique de la loi d'Ohm amène à :

$$\begin{cases} T_c - T_1 = R\phi_1 > 0 \Rightarrow T_c > T_1 \\ T_f - T_2 = R\phi_2 < 0 \Rightarrow T_f < T_2 \end{cases}$$

où ϕ_1 (resp. ϕ_2) est le flux thermique qui circule algébriquement de la source chaude (resp. froide) vers le moteur. Il est du même signe que Q_1 (resp. Q_2). Enfin, pour que le cycle soit moteur, il faut $T_1 > T_2$. En conclusion, les températures vérifient :

$$\boxed{T_f < T_2 < T_1 < T_c}$$

4. La durée du cycle est égale à 2τ. La puissance motrice fournie par le moteur vaut alors :

$$P = \frac{-W}{2\tau} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\tau} \iff \boxed{P = \frac{T_c + T_f - T_1 - T_2}{2R}}$$

5. On applique le second principe de la thermodynamique au système $\mathscr{F}$, sur un cycle :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_c$$

L'entropie créée est toujours positive donc :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \iff \frac{T_c - T_1}{T_1} + \frac{T_f - T_2}{T_2} \leq 0 \iff \boxed{\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} \leq 2}$$

6. En remplaçant l'inégalité de la question précédente par une égalité, on obtient après calculs :

$$T_2 = \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}}$$

La puissance s'écrit alors :

$$P = \frac{1}{2R}\left(T_c + T_f - T_1 - \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}}\right) = \frac{T_c}{2R}\left(1 + \eta - X - \frac{\eta}{2 - X}\right)$$

Un dernière simplification conduit à :

$$\boxed{P = \frac{T_c}{2R}\left(1 - X + \eta\frac{X-1}{2X-1}\right)}$$

7. D'après le résultat de la question 5 :

$$\frac{1}{X} + \frac{T_f}{T_2} = 2 \iff \frac{1}{X} = 2 - \frac{T_f}{T_2} < 2 \iff \boxed{X > \frac{1}{2}}$$

8. On recherche le minimum de la fonction $f(X,\eta)$ par rapport à X, à η fixé :

$$f'(X) = 0 = -1 + \frac{\eta}{(2X_+ - 1)^2} \iff (2X_+ - 1)^2 = \eta^{-1}$$

On a montré à la question précédente que $X > \frac{1}{2}$ donc $2X - 1 > 0$. On conserve la racine positive :

$$2X_+ - 1 = \eta^{\frac{1}{2}} \iff \boxed{X_+ = \frac{1 + \eta^{\frac{1}{2}}}{2}}$$

On en déduit l'expression de la puissance motrice maximale :

$$P_+ = \frac{T_c}{2R}\left(1 - \frac{1 + \eta^{\frac{1}{2}}}{2} + \eta\frac{\frac{1+\eta^{\frac{1}{2}}}{2} - 1}{\eta^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{T_c}{4R}\left(1 - 2\eta^{\frac{1}{2}} + \eta\right)$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$\boxed{P_+ = \frac{T_c}{4R}\left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

9. Le rendement du moteur est égal à :

$$\xi = \frac{-W}{Q_1} = \frac{2P\tau}{Q_1} = \frac{T_c}{T_c - T_1}\left(1 - X + \eta\frac{X-1}{2X-1}\right)$$

Après simplification, on aboutit à :

$$\boxed{\xi = 1 - \frac{\eta}{2X-1}}$$

Le rendement maximal vaut :

$$\boxed{\xi(X_+) = 1 - \frac{\eta}{\eta^{\frac{1}{2}}} = 1 - \eta^{\frac{1}{2}}}$$

Puisque $0 < \eta < 1$ alors $\eta < \eta^{\frac{1}{2}} \iff 1 - \eta > 1 - \eta^{\frac{1}{2}}$. **Le rendement maximal du moteur thermique est inférieur au rendement de Carnot d'un moteur fonctionnant réversiblement entre les deux sources $\boldsymbol{T_c}$ et $\boldsymbol{T_f}$.**

10. Le système $\mathscr{F}$ fonctionne de manière réversible (hypothèse faite à partir de la question 27). Les processus irréversibles sont les **transferts thermiques à travers les deux résistances**. Pour déterminer le taux de création d'entropie, on applique le second principe au système $\{\mathscr{F}$ + résistances thermiques$\}$, sur un cycle :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_f} + S_c \iff S_c = -\frac{Q_1}{T_c} - \frac{Q_2}{T_f}$$

Le taux de création d'entropie est défini par :

$$\dot{\mathscr{S}} = \frac{S_c}{2\tau} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{\tau T_c} + \frac{Q_2}{\tau T_f}\right) = -\frac{1}{2R}\left(\frac{T_c - T_1}{T_c} + \frac{T_f - T_2}{T_f}\right)$$

En utilisant l'expression de T_2 obtenue à la question 26, on trouve :

$$\dot{\mathscr{S}} = \frac{1}{2R}\left(X - 2 + \frac{X}{2X-1}\right)$$

Dans le régime de fonctionnement maximal du moteur ($X = X_+$), le taux de création d'entropie vaut :

$$\dot{\mathscr{S}} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1+\eta^{\frac{1}{2}}}{2} - 2 + \frac{1+\eta^{\frac{1}{2}}}{2\eta^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{4R}\left(\eta^{\frac{1}{2}} - 2 + \eta^{-\frac{1}{2}}\right)$$

On reconnaît à nouveau une identité remarquable :

$$\boxed{\dot{\mathscr{S}} = \frac{1}{4R}\left(\eta^{\frac{1}{4}} - \eta^{-\frac{1}{4}}\right)^2}$$

Le taux de création d'entropie est toujours positif et il est nul lorsque $\eta = 1$, c'est-à-dire quand les deux sources sont à la même température. Le résultat est cohérent.

11. On souhaite évaluer la puissance maximale fournie par la troposphère aux vents et courants atmosphériques :

$$P_+ = \frac{T_c}{4R}\left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Pour cela, nous devons calculer la résitance thermique R. Nous pouvons utiliser :

$$R = \frac{T_c - T_1}{Q_1}\tau$$

avec :

$$Q_1 = 4\pi R_T^2 I\tau$$

où R_T est le rayon terrestre et :

$$T_1 = X_+ T_c = \left(1 + \eta^{\frac{1}{2}}\right)\frac{T_c}{2} \iff T_c - T_1 = \left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right)\frac{T_c}{2}$$

Après simplifications, on écrit la puissance sous la forme :

$$\boxed{P_+ = 2\pi R_T^2\left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right) I}$$

On effectue l'application numérique :

$$\boxed{P_+ = 6 \cdot 10^{15}\,\mathrm{W}}$$

12. Pour ce calcul en ordre de grandeur, on supposera que $\mathscr{D} \sim P_+$. Dans un modèle simple où la masse volumique de l'air est uniforme, la masse de la troposphère vaut $\mathscr{M} = 4\pi R_T^2 h\rho$.
On écrit alors :

$$2\pi R_T^2\left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right) I = 0{,}05 \times 4\pi R_T^2 \rho U^3 \iff \boxed{U = \left[10\left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right)\frac{I}{\rho}\right]^{\frac{1}{3}}}$$

On détermine numériquement cette vitesse :

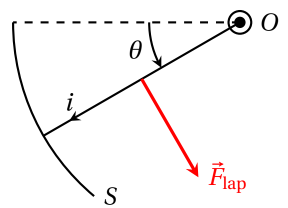
$$\boxed{U = 7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2 \cdot 10^1\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}}$$

Cet ordre de grandeur correspond à un vent léger. La valeur semble plausible.

<u>Exercice 2</u> : Le dermographe

1. et 2. Voir cours.

3.



4. En l'absence de courant et en négligeant le poids, la position d'équilibre est obtenue lorsque le couple de rappel Γ est nul, c'est-à-dire en $\boxed{\theta = 0}$.

5. La partie mobile est soumise à la force de Laplace $\vec{F}_{\mathrm{lap}}$, au couple de rappel Γ et à la réaction $\vec{R}$ exercée par le pivot en O.

6. On applique le théorème du moment cinétique à la tige, par rapport à l'axe de rotation (Oz), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) + \Gamma$$

avec $\mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$ (bras de levier nul). La force de Laplace résultante sur la tige vaut $\vec{F}_{\text{lap}} = i\ell\vec{u}_r \wedge (-B\vec{u}_z) = iB\ell\vec{u}_\theta$. On calcule le moment de cette force en l'appliquant au centre de la tige :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{lap}}) = \frac{\ell}{2} \times iB\ell = \frac{1}{2}iB\ell^2$$

On détermine l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$J\ddot{\theta} = \frac{1}{2}iB\ell^2 - K\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{iB\ell^2}{2J}}$$

Par identification on trouve $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}}$ et $\boxed{A = \frac{iB\ell^2}{2J}}$.

7. La quantité $IB\ell$ est homogène à une force, ce qui permet d'écrire :

$$[A] = \frac{[F]\,\mathrm{L}}{\mathrm{ML}^2} = \frac{\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{ML}^2} = \mathrm{T}^{-2}$$

La grandeur A est de même dimension que $\ddot{\theta}$, l'équation différentielle est bien homogène.

8. La solution particulière est $\theta_p = \frac{A}{\omega_0^2}$. La solution générale s'écrit :

$$\theta(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2}$$

Les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (voir question 4) conduisent à $C_2 = 0$ et $C_1 = -A/\omega_{0^2}$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{A}{\omega_0^2}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)}$$

9. La valeur maximale de $\theta(t)$ est $\theta_{\max} = 2A/\omega_0^2$ (à la date t_m telle que $\omega_0 t_m = \pi$). Le contact entre la tige mobile et l'arc conducteur est rompu si $A_{\max} > \theta_S$:

$$\frac{iB\ell^2}{K} > \theta_S \qquad \text{avec} \qquad B = \mu_0\mu_r n i$$

Après simplification on trouve $\boxed{K < K_{\max} = \frac{\mu_0\mu_r n i^2\ell^2}{\theta_S} = 2{,}2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}$. La valeur donnée dans l'énoncé satisfait bien cette condition.

10. La partie mobile quitte le conducteur à la date t_1 telle que $\theta(t) = \theta_S$. On trouve après calculs que :

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\omega_0}\arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2}{A}\theta_S\right) = 14\,\mathrm{ms}}$$

11. On reprend le TMC, sans la force de Laplace puisque le courant ne circule plus :

$$J\ddot{\theta} = -K\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

On la résout avec comme conditions initiales $\theta(t' = 0^+) = \theta(t' = 0^-) = \theta_S$ et $\dot{\theta}(t' = 0^+) = \dot{\theta}(t' = 0^-) = \frac{A}{\omega_0}\sin(\omega_0 t_1)$. On trouve :

$$\boxed{\theta(t') = \theta_S\cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2}\sin(\omega_0 t_1)\sin(\omega_0 t')}$$

12. L'aiguille oscille entre $\theta = 0$ et $\theta_{\max} = 0{,}096\,\mathrm{rad}$. Son amplitude vaut $\boxed{\theta_m = \frac{\theta_{\max}}{2} = 0{,}048\,\mathrm{rad}}$.

13. Dans la première phase (contact électrique) l'aiguille a un mouvement sinsusoïdal de moyenne A/ω_0^2, dans la deuxième phase (rupture) le mouvement est toujours sinusoïdal, de même période, mais de moyenne nulle. Le passage entre les deux phases est tel que $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ sont continues. La seule courbe compatible avec ces propriétés est la **courbe 1**.le plausible.

<u>Exercice 3</u> : Bobine de Ruhmkorff

1. La lampe étant éteinte, l'intensité $i_2(t)$ reste nulle et la loi des mailles dans le circuit primaire s'écrit, après fermeture de l'intérrupteur :

$$R_1 i_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L_1}i_1 = 0}$$

On a affaire à un régime transitioire du premier ordre de constante de temps $\tau_1 = L_1/R_1$. À $t = 0^-$, l'interrupteur étant ouvert depuis longtemps, la bobine se comporte comme un fil et $i_1(0^-) = \frac{U_0}{R_1}$. Par continuité de l'intensité dans la bobine L_1, l'intensité i_1 est continue donc $i_1(0^+) = \frac{U_0}{R_1}$. La résolution de l'équation conduit à :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{U_0}{R_1}\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}$$

2. On applique la loi des mailles dans le circuit secondaire, la lampe étant éteinte :

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{MU_0}{L_1}\mathrm{e}^{-t}/\tau$$

La valeur maximale est obtenue à $t = 0^+$ et vaut $\boxed{U_2 = \frac{|M|\,U_0}{L_1}}$.

3. La lanterne s'allume à condition que U_2 soit suffisamment élevée (dépasse plusieurs milliers de volts). On voit toutefois que la tension $u_2(t)$ décroit exponentiellement après la fermeture de l'interrupteur donc la lanterne ne peut éclairer durablement avec ce procédé. Pour un éclairage continu il est nécessaire de répéter périodiquement les interruptions de sorte que la tension $u_2(t)$ demeure à tout instant suffisamment élevée.

4. On propose comme taille du tube de la lanterne $\ell = 30\,\mathrm{cm}$ (distance entre les électrodes). Le produit pression × distance vaut $pd \sim 10^2\,\mathrm{Pa\,cm} \sim 1\,\mathrm{Torr\,cm}$. On évalue la tension de claquage à l'aide du document 4.4. : $V_B \sim 2\cdot 10^2\,\mathrm{V}$.

La tension maximale U_2 dépend de l'inductance mutuelle M. Généralement dans un transformateur le couplage entre les circuits est le plus élevé possible. On fait l'hypothèse que le couplage est **idéal** donc $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

On conclut que la lampe s'allume à condition que :

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} U_0 > V_B \iff \boxed{L_2 > \frac{V_B^2}{U_0^2} L_1 = 50\,\mathrm{H}}$$

L'inductance de la bobine secondaire doit être égale au minimum à 50 H, c'est beaucoup plus élevé que pour des bobines classiques utilisées en salle de TP. On comprend que le bobinage secondaire nécessite une telle longueur de fil (jusqu'à 150 km!). La bobine secondaire doit contenir un très grande nombre de spires pour que les décharges se produisent dans la lampe.