# TD31 : Introduction au monde quantique - corrigé

## Exercice 1 : Photons hertziens

1. Le nombre de photons émis par l'émetteur, par seconde vaut (voir cours pour la démo) :

$$\boxed{N = \frac{\mathscr{P}}{hf} = 1{,}43\cdot 10^{30}\,\text{photons}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2. Soit $d$ le diamètre de la pupille de l'œil. La puissance lumineuse qui entre par la pupille vaut $\mathscr{P} = \phi\times\pi\frac{d^2}{4}$ où $\phi$ est le flux lumineux qui arrive sur la Terre en provenance de l'étoile. Par conséquent, le nombre de photons qui entrent dans l'œil par seconde vaut :

$$N = \frac{\pi d^2\phi}{4h\nu} = \frac{\pi d^2\phi\lambda}{4hc}$$

En prenant comme estimation raisonnable $d\sim 5\,\text{mm}$, on obtient numériquement :

$$\boxed{N = 9\cdot 10^3\,\text{photons}\cdot\text{s}^{-1}}$$

## Exercice 2 : Longueur d'onde de de Broglie

1. En ordre de grandeur, la masse d'un individu vaut $m\sim 10^2$ kg et sa vitesse $v\sim 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ quand il marche. Sa quantité de mouvement vaut $\boxed{p = mv\sim 10^2\,\text{N}\cdot\text{s}}$. Sa longueur d'onde de de Broglie vaut :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}\sim 10^{-35}\,\text{m}}$$

Compte tenu de la valeur de $\lambda$, **on ne risque pas de voir un comportement ondulatoire pour un système à l'échelle macroscopique**.

2. La masse d'une molécule de dioxygène (16 nucléons) est de l'ordre de $m\sim 10^{-26}\,\text{kg}$. Sa quantité de mouvement vaut $\boxed{p\sim 10^{-23}\,\text{N}\cdot\text{s}}$ et sa longueur d'onde de de Broglie :

$$\boxed{\lambda\sim 10^{-10}\,\text{m}}$$

Cette longueur d'onde est encore très faible à l'échelle d'un récipient macroscopique. **Le comportement d'un gaz à l'intérieur d'un volume macroscopique peut être étudié avec les lois de la mécanique classique**.

## ⋆ Exercice 3 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

1. Le photon émis lors d'une transition électronique est d'autant plus énergétique (donc sa longueur d'onde est d'autant plus faible) que l'écart entre les deux niveaux est important. Dans la série de Lyman, le rayonnement de plus petite longueur d'onde correspond donc à la transition $\infty\longrightarrow 1$ et celui de plus grande longueur d'onde à la transition $2\longrightarrow 1$ :

$$\boxed{\lambda_{\text{min,Lyman}} = \lambda_{\infty\longrightarrow 1} = \frac{hc}{E_\infty - E_1} = 92\,\text{nm}} \quad\text{et}\quad \boxed{\lambda_{\text{max,Lyman}} = \lambda_{2\longrightarrow 1} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = 122\,\text{nm}}$$

Ces deux rayonnements appartiennent au domaine des **UV**.

2. Par un raisonnement analogue, on obtient pour les séries de Balmer et Paschen :

$$\boxed{\lambda_{\text{min,Balmer}} = \lambda_{\infty\longrightarrow 2} = \frac{hc}{E_\infty - E_2} = 366\,\text{nm}} \quad\text{et}\quad \boxed{\lambda_{\text{max,Balmer}} = \lambda_{3\longrightarrow 2} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = 658\,\text{nm}}$$

$$\boxed{\lambda_{\text{min,Paschen}} = \lambda_{\infty\longrightarrow 3} = \frac{hc}{E_\infty - E_3} = 823\,\text{nm}} \quad\text{et}\quad \boxed{\lambda_{\text{max,Paschen}} = \lambda_{4\longrightarrow 3} = \frac{hc}{E_4 - E_3} = 1880\,\text{nm}}$$

Le rayonnement associé à la série de Balmer est dans le domaine **UV-visible**. Celui associé à la série de Paschen est dans **l'infrarouge**.

3. Les quatre radiations visibles se trouvent donc dans la série de Balmer :

$$\boxed{\lambda_{6\longrightarrow 2} = 411\,\text{nm}} \quad \boxed{\lambda_{5\longrightarrow 2} = 435\,\text{nm}} \quad \boxed{\lambda_{4\longrightarrow 2} = 488\,\text{nm}} \quad \boxed{\lambda_{3\longrightarrow 2} = 658\,\text{nm}}$$

## ⋆ Exercice 4 : Effet photoélectrique

On écrit, pour chaque expérience, la relation entre la longueur d'onde $\lambda$ du photon incident et l'énergie cinétique $E_c$ du photoélectron émis.

$$\begin{cases} \dfrac{hc}{\lambda_1} = W + E_{c1} & (1) \\ \dfrac{hc}{\lambda_2} = W + E_{c2} & (2) \end{cases}$$

En écrivant (1) − (2), on peut isoler la constante de Planck :

$$\boxed{h = \frac{E_{c1} - E_{c2}}{c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)} = 6{,}6\cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}$$

On peut également écrire :

$$hc = \lambda_1(W + E_{c1}) = \lambda_2(W + E_{c2}) \iff \boxed{W = \frac{\lambda_1 E_{c1} - \lambda_2 E_{c2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = 1{,}7\,\text{eV}}$$

Enfin, la longueur d'onde seuil du potassium vaut :

$$\boxed{\lambda_s = \frac{hc}{W} = 711\,\text{nm}}$$

## ⋆ Exercice 5 : Interférences de matière

1. La masse d'un atome de néon vaut : $\boxed{m = \dfrac{M}{\mathcal{N}_A} = 3{,}4\cdot 10^{-26}\,\text{kg}}$.

2. La quantité de mouvement de ces atomes vaut $p = \sqrt{2mE_c} = \sqrt{3mk_BT}$. La longueur d'onde associée à ces atomes vaut :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}}}$$

3. À une température de 1mK, la longueur d'onde vaut $\boxed{\lambda = 2\cdot 10^{-8}\,\text{m}}$. À température ambiante ($T = 300\,\text{K}$), $\boxed{\lambda = 3\cdot 10^{-11}\,\text{m}}$.

À température ambiante, la longueur d'onde des atomes est trop faible pour espérer les faire sensiblement diffracter à travers deux fentes. En revanche, avec des fentes dont la largeur est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres, il est envisageable de réaliser l'expérience des fentes Young avec des atomes froids. La technologie de refroidissement et de confinement d'atomes par faisceaux laser mise au point, entre autres, par le français **Claude Cohen-Tannoudji** dans les années 80 (prix nobel 1997 pour ces travaux) a permis de réaliser cette expérience, connue également pour avoir été élue "plus belle expérience de la physique" en 2002 par les lecteurs du magazine "Physics World".

## ⋆ Exercice 6 : Électrons confinés

1. Voir cours : $\boxed{E_n = n^2 \dfrac{h^2}{8mL^2}}$.

2. Il y a 11 doubles-liaisons dans cette molécule donc $\boxed{\text{22 électrons délocalisés}}$. Dans le diagramme énergétique de la molécule, les 11 orbitales de plus basse énergie sont remplies chacune avec 2 électrons de spins opposés. Le dernier niveau rempli est donc le niveau $\boxed{n = 11}$.

3. La différence d'énergie entre les niveaux $n = 12$ et $n = 11$ vaut :

$$\boxed{E_{12} - E_{11} = 2{,}6\,\text{eV}}$$

Un photon associé à une transition électronique entre ces deux niveaux a une longueur d'onde :

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{E_{12} - E_{11}} = 480\,\text{nm}}$$

4. Un corps qui contient beaucoup de β-carotène va absorber, dans le visible, les radiations de longueur d'onde 480 nm, c'est-à-dire le **bleu-cyan**. Par conséquent, la couleur diffusée par ce corps, qui est la couleur complémentaire du bleu-cyan, est **l'orange**.

## ⋆⋆ Exercice 7 : Puits infini 1D et équation de Schrödinger

1. Dans l'équation de Schrödinger, les termes $E_n\Psi_n$ et $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi_n}{dx^2}$ sont finis, donc $V(x)\Psi_n(x)$ doit l'être aussi. Or, en dehors du puits, l'énergie potentielle est infinie donc la fonction d'onde est **nécessairement nulle**.

2. À l'intérieur du puits, l'énergie potentielle est nulle. L'équation de Schrödinger s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + \frac{2mE_n}{\hbar^2}\Psi_n = 0$$

La fonction d'onde est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, dont les solutions sont sinusoïdales, avec un vecteur d'onde :

$$\boxed{k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}}$$

On en déduit que la longueur d'onde de la particule vaut :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{h}{\sqrt{2mE_n}}}$$

3. Les conditions limites sont $\boxed{\Psi_n(0,t) = \Psi_n(L,t) = 0\ \forall t}$. La condition limite en $x = 0$ permet d'écrire :

$$\sin(\varphi_n) = 0 \iff \boxed{\varphi_n = 0\ [\pi]}$$

La condition limite en $x = L$ permet ensuite d'écrire :

$$\sin(k_n L) = 0 \iff k_n L = n\pi\ ,\ n\in\mathbb{N}^* \iff L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{h}{\sqrt{8mE_n}}$$

En inversant cette dernière équation, on peut exprimer les niveaux d'énergie de la particule en fonction de $L$ :

$$\boxed{E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2}}$$

On retrouve (heureusement) le résultat établi en cours.

En exploitant les relations $\varphi_n = 0\ [\pi]$ et $k_n = \frac{n\pi}{L}$, on peut exprimer la fonction d'onde $\Psi_n(x)$ sous la forme :

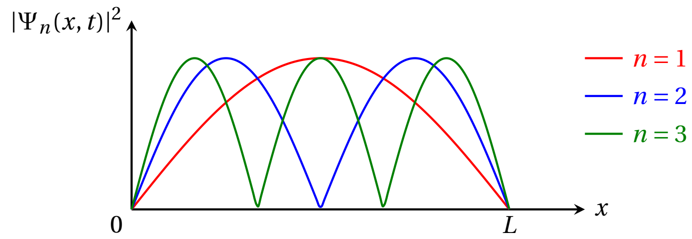
$$\boxed{\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

4. La densité de probabilité de présence vaut $\boxed{c = A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$.

La relation de normalisation traduit mathématiquemenent le fait que la particule se trouve obligatoirement à l'intérieur du puits :

$$\int_0^L |\Psi_n(x,t)|^2\,dx = 1 \iff A_n^2\frac{L}{2} = 1 \iff \boxed{A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

5. L'allure de $|\Psi_n(x,t)|^2$ permet de déterminer les lieux, à l'intérieur du puits, où la probabilité de trouver la particule est nulle, et ceux où elle est maximale.



## ⋆⋆ Exercice 8 : Effet Doppler relativiste

Lorsqu'une galaxie s'éloigne de l'observateur, la fréquence des ondes lumineuses que nous recevons d'elle est, en vertu de l'effet Doppler-Fizeau, inférieure à la fréquence de ces même ondes, observées **dans le référentiel lié à la galaxie**. Par conséquent, sa longueur d'onde est supérieure (ce phénomène est couramment appelé **décalage dans le rouge**).

Pour déterminer la vitesse d'éloignement de la galaxie, nous allons comparer la longueur d'onde de la radiation associée à la transition $3 \longrightarrow 2$ de l'hydrogène dans le référentiel de la galaxie à celle mesurée sur Terre.

En prenant pour expression des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène la formule classique $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ (avec $E_n$ en eV), la longueur d'onde d'émission dans le référentiel lié à la galaxie vaut :

$$\lambda' = \frac{hc}{E_3 - E_2} = 0,658\,\mu\text{m}$$

Si l'on note respectivement $f$ et $f'$ la fréquence de l'onde lumineuse observée dans le référentiel terrestre et dans le référentiel lié à la galaxie, on peut écrire :

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f' \iff \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{c}{\lambda'} \iff \boxed{\beta = \frac{1 - \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2} = 0,046}$$

La vitesse d'éloignement de la galaxie vaut : $\boxed{v = \beta c = 1,4 \cdot 10^7\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

En s'appuyant sur le graphe fourni dans l'énoncé, on peut estimer la distance qui nous sépare de cette galaxie :

$$\boxed{d = 210\,\text{MPc}}$$