

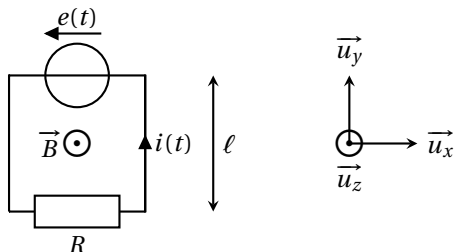
TD 29 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent - corrigé

★★ Exercice 1 : Rails de Laplace

On commence par réaliser l'**étude électrique** du circuit, en calculant la fem d'induction par la loi de Faraday. On oriente arbitrairement le circuit pour que le vecteur surface soit de même sens que \vec{B} (selon $+\vec{u}_z$) :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -B\ell v$$

On détermine ensuite le courant induit, dont le sens est représenté sur la figure ci-dessous (d'après l'énoncé, on néglige l'inductance du circuit) :

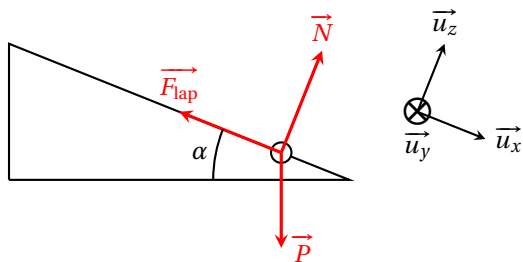


D'après la loi des mailles,
$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{B\ell v}{R}$$

On passe maintenant à l'**étude mécanique**. On détermine la résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la tige mobile :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = i(t) \ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i(t) B \ell \vec{u}_x = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} \vec{u}_x$$

On représente schématiquement les forces extérieures qui s'appliquent sur la tige mobile (poids, réaction normale des rails et force de Laplace) :



On applique le PFD à la tige mobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x :

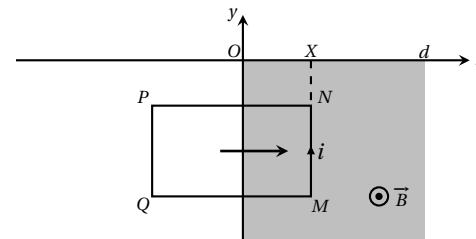
$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} + mg \sin \alpha \iff \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{mR} v = g \sin \alpha$$

On résout cette équation différentielle, avec la condition initiale $v(0) = 0$, en posant $\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$ et $v_\infty = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 \ell^2}$:

$$v(t) = v_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

★★ Exercice 2 : Freinage électromagnétique

1. Pour qu'un courant induit apparaisse dans le cadre, il faut que le flux de champ \vec{B} à travers le cadre soit variable. Cela ne se produit que lorsque la cadre **entre ou sort du champ magnétique**. Quand le cadre est entièrement à l'extérieur ou à l'intérieur du champ, le flux est stationnaire et, d'après la loi de Faraday, il n'y a pas de courant induit. On représente graphiquement le cadre lorsqu'il entre dans le champ magnétique, et on oriente arbitrairement le circuit :



On détermine la fem d'induction avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BaX)}{dt} = -aBv$$

Le courant induit vaut alors (en négligeant l'inductance) : $i = \frac{e}{R} = -\frac{aBv}{R}$. La force de Laplace qui s'exerce sur le cadre se calcule uniquement en regardant le côté MN car le côté PQ est hors du champ et, par symétrie, les actions de Laplace qui s'exercent sur les côtés PN et QM sont opposées donc se compensent.

$$\vec{F}_{\text{lap}} = ia \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = iaB \vec{u}_x \iff \vec{F}_{\text{lap}} = -\frac{a^2 B^2}{R} v \vec{u}_x$$

Cette force est une force de freinage, conformément à la loi de Lenz.

2. On applique le PFD au cadre dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x :

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{R} v \iff \frac{dv}{dt} + \frac{a^2 B^2}{mR} v = 0$$

En écrivant $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dX} \cdot \frac{dX}{dt} = v \frac{dv}{dX}$, on obtient pour la fonction $v(X)$ l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dX} = -\frac{a^2 B^2}{mR} v$$

Tandis que $v(t)$ a une forme classique d'exponentielle décroissante, la fonction $v(X)$ décroît **linéairement** avec X . On peut facilement déterminer la vitesse du cadre en fonction de la distance qu'il a parcouru horizontalement.

3. Le conducteur ressort du champ magnétique si sa vitesse ne s'est pas annulée en chemin. On détermine $v(X)$ lorsque le cadre **entre** dans le champ magnétique :

$$v(X) = v_0 - \frac{a^2 B^2}{mR} X$$

TD 29 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent - corrigé

Le freinage s'arrête lorsque le cadre est entièrement rentré dans le champ \vec{B} , c'est-à-dire pour $X = b$. Sa vitesse s'exprime alors sous la forme :

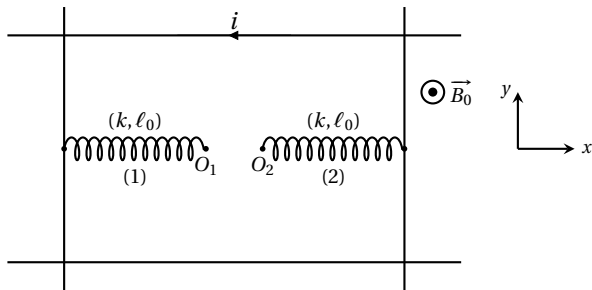
$$v(b) = v_0 - \frac{a^2 B^2 b}{mR}$$

Si $v_0 > \frac{a^2 B^2 b}{mR}$ alors la cadre rentre dans le champ \vec{B} sans s'être arrêté en chemin. Sa vitesse aura varié de $\Delta v_{\text{entrée}} = -\frac{a^2 B^2 b}{mR}$. Il poursuivra ensuite son chemin jusqu'à ce qu'il sorte du champ magnétique. On peut démontrer que les mêmes calculs permettent d'étudier la sortie du champ magnétique et que le cadre est à nouveau freiné (loi de Lenz), la variation de vitesse étant identique à celle d'entrée : $\Delta v_{\text{sortie}} = \Delta v_{\text{entrée}} = -\frac{a^2 B^2 b}{mR}$.

Par conséquent, la vitesse du cadre à la sortie du champ vaut $v = v_0 - 2\frac{a^2 B^2 b}{mR}$. Si $v_0 > 2\frac{a^2 B^2 b}{mR}$ alors il peut traverser le champ magnétique sans s'arrêter en chemin. Au cours la traversée, sa vitesse aura varié de $\Delta v = -2\frac{a^2 B^2 b}{mR}$.

★★ Exercice 3 : Oscillations couplées

1. **Étude électrique** : on détermine la fem d'induction dans le circuit, orienté arbitrairement (voir figure ci-dessous) :



D'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 a(x_2 - x_1 + c^{te})) = -aB_0(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

La constante exprimée ici est la distance qui sépare les positions d'équilibre des deux tiges. Elle disparaît par dérivation. On néglige l'inductance du circuit et la résistance totale est égale à R puisque chacune des deux tiges a une résistance $\frac{R}{2}$. Le courant induit vaut :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{aB_0}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Étude mécanique : on exprime les forces de rappel élastique qui s'exercent sur chacune des tiges. Les positions d'équilibre des tiges sont telles que $\ell_{1,\text{eq}} = \ell_{2,\text{eq}} = \ell_0$. Par définition de x_1 et x_2 , $\ell_1 = \ell_0 - x_1$ et $\ell_2 = \ell_0 + x_2$:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -k(\ell_1 - \ell_0)(-\vec{u}_x) = -kx_1\vec{u}_x \\ \vec{F}_2 = -kx_2\vec{u}_x \end{cases}$$

On exprime ensuite les forces de Laplace qui s'exercent sur chacune des tiges :

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{lap},1} = -i a \vec{u}_y \wedge B_0 \vec{u}_z = -i a B_0 \vec{u}_x = \frac{2a^2 B_0^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \vec{F}_{\text{lap},2} = i a \vec{u}_y \wedge B_0 \vec{u}_z = -\frac{2a^2 B_0^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Les tiges mobiles sont également soumises à la réaction normale des rails, colinéaire à \vec{u}_z . On applique le PFD à chacune des tiges dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \frac{a^2 B_0^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \frac{a^2 B_0^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{a^2 B_0^2}{mR}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = \frac{a^2 B_0^2}{mR}\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + \frac{a^2 B_0^2}{mR}\dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 = -\frac{a^2 B_0^2}{mR}\dot{x}_1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

2. En écrivant (1) + (2), on obtient : $\ddot{S} + \frac{k}{m}S = 0$

$S = x_1 + x_2$ représente, à un facteur 2 près, **la position du centre d'inertie des deux tiges**. En écrivant (2) - (1), on obtient :

$$\ddot{D} + \frac{2a^2 B_0^2}{mR}\dot{D} + \frac{k}{m}D = 0$$

$D = x_2 - x_1$ représente, à une constante additive près, **la distance qui sépare les deux tiges**.

3. On ne cherche pas à obtenir les solutions ces équations à tout instant. On constate que $D(t)$ est solution d'une équation d'oscillateur amorti. Cela signifie que $D(t)$ va varier pendant un certain temps (régime transitoire), jusqu'à atteindre une valeur stationnaire (régime permanent). Puisque l'équation vérifiée par D n'a pas de second membre, on en déduit qu'en régime permanent, $D_\infty = 0$. Physiquement, cela signifie qu'en régime permanent, la distance entre les deux tiges est constante. Cela ne signifie pas que les tiges sont immobiles (nous verrons cela dans un instant), mais qu'**elles se déplacent en bloc**, comme si elles formaient un solide.

Pour déterminer le mouvement des deux tiges, il faut résoudre l'équation différentielle vérifiée par $S(t)$. Pas de régime transitoire ici, il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On écrit les conditions initiales sur S :

$$S(0) = x_1(0) + x_2(0) = a' \quad \text{et} \quad \dot{S}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0$$

Ce qui permet d'obtenir la solution suivante : $S(t) = a' \cos(\omega_0 t)$. On en déduit les positions des deux tiges, en régime permanent :

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{S(t)}{2} = \frac{a'}{2} \cos(\omega_0 t)$$

En régime permanent, **les deux tiges oscillent en phase, avec une amplitude $\frac{a'}{2}$** .

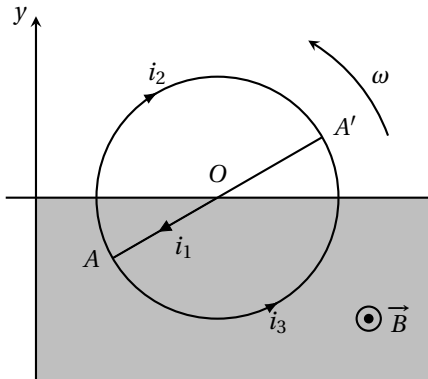
TD 29 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent - corrigé

★★ Exercice 4 : Courants induits dans une roue

La situation étudiée a des points communs avec la machine à entrefer plan. Si l'on applique la loi de Faraday en considérant la circonférence du circuit, il ne devrait pas y avoir de courant induit puisque le flux de champ magnétique à travers ce contour est stationnaire. Autre souci, si l'on choisit un contour en forme de demi-cercle, la loi de Faraday prévoit cette fois-ci l'existence d'une fem d'induction, mais elle ne permet pas de savoir comment cette fem est répartie entre la branche centrale et les branches périphériques. En conclusion, **nous n'utiliserons pas la loi de Faraday dans cet exercice**. En cours, nous avons vu qu'il existe une alternative, qui consiste à utiliser la relation (toujours valable) : $\mathcal{P}_{\text{lap}} + ei = 0$ pour déterminer l'expression de la fem d'induction dans chacune des trois branches de ce circuit.

Commençons par étudier un élément de courant situé sur la circonférence. Les courants y sont orthogonaux et le champ magnétique est axial donc les actions de Laplace sont **radiales**. Puisqu'elles sont dans la direction du centre du cercle, elles ne produisent pas de moment par rapport à l'axe de rotation. On en déduit que sur la circonférence du cercle, $\mathcal{P}_{\text{lap}} = 0$ donc $e = 0$. **Il n'y a pas de fem d'induction sur la circonférence**.

On étudie désormais le rayon OA . On se place dans la base cylindrique (\vec{u}_θ est orienté dans le sens de ω , du coup \vec{u}_z est dans le sens de \vec{B}) et on oriente arbitrairement les courants dans les trois branches de la manière suivante :



On détermine la force de Laplace résultante qui s'exerce sur OA :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = i_1 a \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z = -i_1 a B \vec{u}_\theta$$

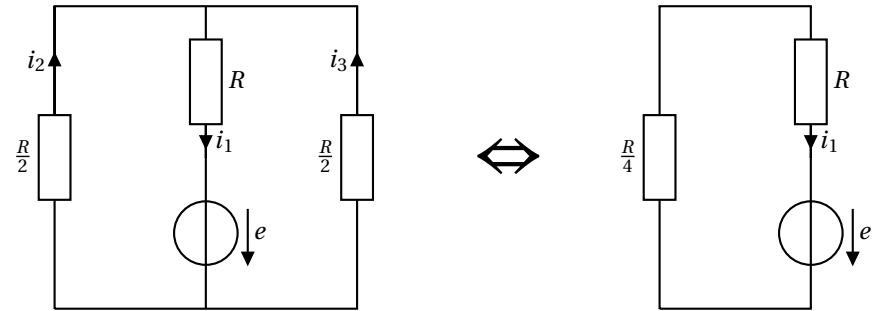
On détermine le moment des actions de Laplace sur le rayon OA en appliquant \vec{F}_{lap} au centre C du rayon :

$$\mathcal{M}_{\text{lap}} = (\vec{OC} \wedge \vec{F}_{\text{lap}}) \cdot \vec{u}_z = \left[\frac{a}{2} \vec{u}_r \wedge (-i_1 a B \vec{u}_\theta) \right] \cdot \vec{u}_z = -\frac{1}{2} i_1 a^2 B$$

On calcule enfin la puissance des actions de Laplace puis la fem d'induction dans le rayon :

$$\mathcal{P}_{\text{lap}} = \mathcal{M}_{\text{lap}} \omega = -\frac{1}{2} i_1 a^2 B \omega \iff e = -\frac{\mathcal{P}_{\text{lap}}}{i_1} = \frac{1}{2} a^2 B \omega$$

On peut dès lors tracer un schéma équivalent du circuit, en négligeant les inductances. Comme la circonférence a une résistance totale égale à R , chaque branche en forme de demi-cercle a une résistance $\frac{R}{2}$.



On rassemble les résistances en dérivation pour obtenir le schéma équivalent ci-dessus. On peut calculer i_1 à l'aide de la loi de Pouillet et en déduire ainsi i_2 et i_3 :

$$i_1 = \frac{4e}{5R} = \frac{2a^2 B \omega}{5R} \quad \text{et} \quad i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = \frac{a^2 B \omega}{5R}$$

Comme on l'a calculé plus haut, le moment des actions de Laplace qui s'exercent sur la roue vaut :

$$\mathcal{M}_{\text{lap}} = -\frac{1}{2} i_1 a^2 B = -\frac{a^4 B^2 \omega}{5R}$$

Les actions de Laplace exercent un moment de freinage, conformément à la loi de Lenz.

★★ Exercice 5 : Microampèremètre magnétoélectrique

1. **Étude électrique** : Puisque le champ est radial, le flux de champ magnétique à travers la bobine est nul à tout instant. D'après la loi de Faraday, il ne devrait pas y avoir de fem induite. Pourtant, nous allons voir qu'ici encore, la loi de Faraday ne s'applique pas, et nous allons démontrer qu'il existe bel et bien une fem d'induction, que l'on va calculer à l'aide de $\mathcal{P}_{\text{lap}} + ei = 0$.

On considère le côté QM . On calcule la résultante des actions de Laplace :

$$\vec{F}_{\text{lap}} = N i b \vec{u}_z \wedge -B_0 \vec{u}_r = -N i B_0 b \vec{u}_\theta$$

Le facteur N vient du fait qu'il y a N spires bobinées sur le cadre, donc N fils verticaux, entre Q et M , parcourus par le même courant i . On détermine le moment des actions de Laplace par rapport à l'axe (Δ) orienté vers le haut en situant le point d'application de \vec{F}_{lap} au centre du segment (car le champ \vec{B} est le même en tout point de QM est que cette portion de circuit est rectiligne) :

$$\mathcal{M}_{\text{lap}} = \frac{a}{2} \times (-N i B_0 b) = -\frac{1}{2} N i B_0 a b$$

On exprime enfin la puissance des actions de Laplace puis la fem d'induction dans la portion MQ :

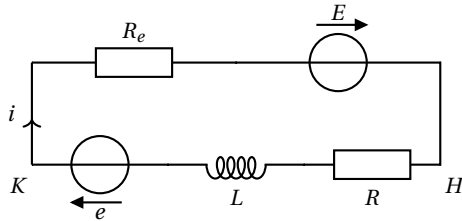
$$\mathcal{P}_{\text{lap}} = \mathcal{M}_{\text{lap}} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} N i B_0 a b \dot{\theta} \iff e_{QM} = -\frac{\mathcal{P}_{\text{lap}}}{i} = \frac{1}{2} N B_0 a b \dot{\theta}$$

TD 29 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent - corrigé

On répète ces opérations sur le coté PN . Comme le champ et le courant ont tous deux changé de sens, cela revient à dire que la force de Laplace, et donc la fem d'induction, est la même de l'autre côté de la bobine : $e_{PN} = e_{QM} = \frac{1}{2}NB_0ab\dot{\theta}$. Par conséquent, le moment total des actions de Laplace et la fem d'induction totale valent :

$$\mathcal{M}_{\text{lap}} = -NiB_0ab = -\Phi_0 i \quad \text{et} \quad e = NB_0ab\dot{\theta} = \Phi_0\dot{\theta}$$

On trace le schéma équivalent du circuit, en tenant compte de l'inductance de la bobine et de sa résistance R :



On détermine enfin l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ en écrivant la loi des mailles :

$$E + \Phi_0\dot{\theta} = (R + R_e) i + L \frac{di}{dt}$$

Étude mécanique : On applique le TMC à la bobine dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\text{lap}} + \mathcal{M}_{\text{rappel}} + \mathcal{M}_{\text{frott}} = -\Phi_0 i - h\dot{\theta} - C\theta \iff J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta + \Phi_0 i = 0$$

Dans ces équations, $\Phi_0 = NB_0ab$ a la dimension d'un **flux de champ magnétique**.

2. On se place en régime permanent. Comme la fem E est constante, ce régime permanent est **stationnaire**. Le courant i_p et la position angulaire θ_p vérifient :

$$\begin{cases} E = (R + R_e) i_p \\ C\theta_p + \Phi_0 i_p = 0 \end{cases} \iff i_p = \frac{E}{R + R_e} \quad \text{et} \quad \theta_p = -\frac{\Phi_0 E}{C(R + R_e)}$$

3. Si l'on néglige l'influence de l'inductance alors on peut écrire : $i = \frac{E + \Phi_0\dot{\theta}}{R + R_e}$.

En réinjectant dans l'équation mécanique, on obtient :

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + C\theta + \Phi_0 \frac{E + \Phi_0\dot{\theta}}{R + R_e} = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{1}{J} \left(h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} \right) \dot{\theta} + C\theta = -\frac{\Phi_0 E}{R + R_e}$$

Avec les notations de l'énoncé, cela revient à écrire :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{\Phi_0 E}{R + R_e}$$

4. Cette équation est celle d'un oscillateur amorti. Sa solution est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p$$

avec $\theta_h(t)$ la solution de l'équation homogène, qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Le cas $\lambda = \omega_0$ correspond au cas d'un régime transitoire **critique**. Dans ce cas, on a vu que le temps de retour à l'équilibre est minimal. C'est évident un atout pour un appareil de mesure dont on souhaite que le temps de réponse soit le plus court possible.

Cette condition est réalisée si :

$$\frac{1}{2J} \left(h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} \right) = \sqrt{\frac{C}{J}} \iff h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} = 2\sqrt{CJ} \iff \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} = 2\sqrt{CJ} - h \iff R_{ec} = \frac{\Phi_0^2}{2\sqrt{CJ} - h} - R$$