Chapitre 20

DÉTERMINANTS

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie non nulle.

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On admet le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to K$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tous $\alpha, \beta \in K$, pour tous $u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n, v_i \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, \alpha u_i + \beta v_i, \ldots, u_n) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + \beta \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, v_i, \ldots, u_n).$$

(ii) $\det_{\mathcal{B}}$ est **alternée** *: pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$,*

$$u_i = u_j \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

(iii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Définition 1 *Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est appelé* **déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$**.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, soient $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Le déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans $\mathcal{B}$ est alors noté

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition 2

(i) Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(ii) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soient u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1.$$

Démonstration : Il suffit de vérifier les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 1. □

En dimension 3, la **règle de Sarrus** permet de retrouver la formule :

$$\text{Comptés positivement : } \left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right| \qquad \text{Comptés négativement : } \left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}\right|$$

2 Propriétés

Proposition 3 *Le déterminant est* **antisymétrique** *: pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$,*

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$

Démonstration : La linéarité par rapport aux i^e et j^e variables permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_i+u_j,\ldots,u_i+u_j,\ldots,u_n) =& \det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_i,\ldots,u_n)+\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots,u_n)\\ &+\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots,u_n)+\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_j,\ldots,u_n),\end{aligned}$$

donc, puisque le déterminant est alterné :

$$0 = 0+\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots,u_n)+\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots,u_n)+0,$$

d'où le résultat. □

Proposition 4 *Si une application $\varphi : E^n \to K$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée, alors $\varphi = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration :
Supposons d'abord que $\varphi(\mathcal{B}) \neq 0$. On voit facilement que l'application $\dfrac{1}{\varphi(\mathcal{B})}\varphi$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables, alternée et qu'elle vaut 1 en $\mathcal{B}$. Par unicité du déterminant (théorème 1) on en déduit que cette application est $\det_{\mathcal{B}}$ et donc que $\varphi = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$.
Supposons maintenant que $\varphi(\mathcal{B}) = 0$. On va montrer que φ est nulle. Soit $(u_1,\ldots,u_n) \in E_n$. Posons $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$. Notons $(a_{1j},\ldots,a_{nj})$ les coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\varphi(u_1,\ldots,u_n) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}\right) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}\ldots a_{i_n n}\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = 0$$

car si deux des i_k sont égaux on a $\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = 0$ puisque φ est alternée, et sinon $(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ est une permutation des vecteurs de $\mathcal{B}$ donc $\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = \pm\varphi(\mathcal{B}) = 0$ par antisymétrie de φ (qui se démontre comme dans la proposition 3). □

Proposition 5 *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration : Proposition précédente avec $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$. □

Proposition 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une famille de n vecteurs de E est libre (donc est une base de E) si et seulement si son déterminant dans n'importe quelle base de E est non nul.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
($\Rightarrow$) Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de n vecteurs de E. C'est donc une base de E. D'après la proposition précédente on a $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, d'où $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 1$. Par conséquent $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
($\Leftarrow$) On raisonne par contraposée. Supposons que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille liée de E. D'après un théorème, l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres : il existe $j \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_{j-1},\ldots,\lambda_n \in K$ tels que $u_j = \sum_{i\neq j}\lambda_i u_i$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_j,\ldots,u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,\sum_{i\neq j}\lambda_i u_i,\ldots,u_n) = \sum_{i\neq j}\lambda_i\det_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_i,\ldots,u_n) = 0$$

car le déterminant est alterné. □

Exemples :

1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $u = (-1,3,2)$, $v = (4,5,-2)$ et $w = (1,4,-1)$. Alors le déterminant de la famille (u,v,w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix} = 25$. Il est non nul donc la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X+1$ et $P_3 = 4X^2-X+3$. Alors le déterminant de la famille (P_1,P_2,P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix} = 0$. Elle est donc liée.

Remarque :

Dans une base orthonormale directe, le déterminant d'une famille de n vecteurs correspond au volume algébrique du n-parallélépipède tracé sur ces vecteurs.

Par exemple, en dimension 2, l'aire algébrique du parallélogramme tracé sur les vecteurs $u(2,1)$ et $v(1,3)$ est $\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 5$.

En dimension 3, le volume algébrique du parallélépipède tracé sur $u(1,1,2)$, $v(1,2,3)$, $w(2,1,0)$ est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix} = -3$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour toute famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E on a* $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Dans cette proposition, si $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$, $f(\mathcal{F})$ désigne la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$.

Démonstration :

On montre facilement que l'application $\varphi : E^n \to K$ définie par $\varphi(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F}))$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. D'après la proposition 4 on a $\varphi = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$ ce qui donne le résultat. □

Proposition 8 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors* $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))$.

Démonstration :
D'après les propositions 5 et 7 on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$. □

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. Le* **déterminant de f** *est*

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

D'après la proposition précédente, ce déterminant est indépendant de la base choisie.

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x - 2y, x + 4y)$. En choisissant comme base la base canonique on obtient $\det f = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14$.

Proposition 9

(i) $\det \mathrm{Id}_E = 1$.

(ii) Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$.

(iii) Un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si $\det f \neq 0$. *Dans ce cas,* $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$.

Démonstration : Le (i) est immédiat. Pour le (ii) on a d'après la proposition 7

$$\det(f \circ g) = \det_{\mathcal{B}}(f(g(\mathcal{B}))) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\det_{\mathcal{B}}(g(\mathcal{B})) = \det f \times \det g$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Le (iii) est une conséquence de la proposition 6 et du fait qu'un endomorphisme est bijectif si et seulement si il envoie une base sur une base, et dans ce cas d'après (i) et (ii) on a $\det(f^{-1})\det f = \det(f^{-1} \circ f) = \det \mathrm{Id}_E = 1$. □

4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Le* **déterminant** *de A est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n.*

Autrement dit, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de K^n et $C_1, \ldots, C_n \in K^n$ sont les colonnes de A.

Proposition 10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

(i) Si les colonnes de A forment une famille liée, alors son déterminant est nul.

(ii) Si on intervertit deux colonnes de A, son déterminant change de signe.

(iii) Si on multiplie A par un scalaire λ, alors son déterminant est multiplié par λ^n : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(iv) Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes, son déterminant est inchangé.

Démonstration :
(i) est une conséquence de la proposition 6.
(ii) vient de l'antisymétrie du déterminant.
(iii) : $\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det A$.
(iv) : $\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_j + \sum_{k\neq j} \lambda_k C_k, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \sum_{k\neq j} \lambda_k \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_k, \dots, C_k, \dots, C_n) = \det A$ car tous les déterminants dans la somme sont nuls (deux colonnes égales). □

Proposition 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de base $\mathcal{B}$. Soient f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Alors $\det f = \det A$.*

Démonstration :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans $\mathcal{B}$ sont les mêmes que celles des colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A dans la base canonique de K^n, donc $\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \det A$. □

Proposition 12

(i) $\det I_n = 1$.

(ii) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors $\det(AB) = \det A \times \det B$.

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. *Dans ce cas,* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Démonstration : C'est la traduction matricielle de la proposition 9. □

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Corollaire 13 *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*

Démonstration : Si $A = PBP^{-1}$, où P est inversible, alors $\det A = (\det P)(\det B)(\det P^{-1}) = (\det P)(\det B)(\det P)^{-1} = \det B$. □

Proposition 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors* $\det A^T = \det A$.

Démonstration : Admis. □

5 Calcul des déterminants

• Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 15 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

Démonstration :
Soit A une matrice triangulaire supérieure et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses coefficients diagonaux.
Si $\alpha_1 = 0$, alors la première colonne est nulle donc $\det A = 0$. Sinon, on peut sortir α_1 du déterminant et, en enlevant à chaque colonne un multiple de la première, on peut mettre le déterminant sous la forme $\alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{vmatrix}$.
De même, si $\alpha_2 = 0$, alors la deuxième colonne est nulle et $\det A = 0$, et sinon on peut sortir α_2 du déterminant et, en enlevant à chaque colonne un multiple de la deuxième, on fait apparaître des 0 à droite du 1.
En continuant ainsi, on obtient soit 0 si l'un des α_i est nul, soit $\alpha_1 \dots \alpha_n \times \det I_n$. Dans les deux cas on a $\det A = \alpha_1 \dots \alpha_n$.
Pour une matrice triangulaire inférieure, on raisonne de manière analogue en partant de la dernière colonne. □

• Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition 16 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

(i) Si on intervertit deux lignes ou deux colonnes de A, alors son déterminant change de signe.

(ii) Si on multiplie une ligne ou une colonne de A par un scalaire α, alors son déterminant est multiplié par α.

(iii) Si on ajoute à une ligne (resp. à une colonne) de A une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes), alors son déterminant ne change pas.

Démonstration : Conséquence des propositions 10 et 14. □

• **Développement selon une rangée**

Considérons le déterminant $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On dit que l'on a développé D selon la première colonne.

On peut développer ainsi un déterminant par rapport à n'importe quelle rangée. Les déterminants d'ordre 2 s'obtiennent en barrant la ligne et la colonne de D auxquelles appartient le coefficient placé devant. Les signes devant ces coefficients sont donnés par la règle suivante :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Soit par exemple $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. En développant D par rapport à la troisième colonne on obtient :

$$D = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 11 - 2 \times 3 + 6 \times (-2) = 15.$$

En développant D par rapport à la deuxième ligne on obtient :

$$D = -4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (-6) + 1 \times (-3) - 2 \times 3 = 15.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 17 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A. Alors :*

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

La première formule correspond au développement par rapport à la j^e colonne, la seconde au développement par rapport à la i^e ligne.

Démonstration : (non exigible)
Par linéarité par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ a_{21} & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & * & \ldots & * \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \ldots + a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{11} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{21} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{n1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

en utilisant les opérations élémentaires sur les colonnes pour passer de la première à la deuxième ligne, et en faisant remonter une par une les lignes $(1\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0)$ en première position pour passer de la deuxième à la troisième.

Or l'application $M \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}$ est linéaire par rapport aux colonnes de sa variable, alternée, et elle envoie I_{n-1} sur 1. D'après le théorème 1, on en déduit que cette application est le déterminant. On a donc $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix} = \det M$ pour toute matrice M.

L'égalité ci-dessus devient alors $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1}$, ce qui correspond au développement de $\det A$ par rapport à la première colonne.

Les formules donnant le développement par rapport aux autres colonnes s'en déduisent facilement, en permutant des colonnes, et celles donnant le développement par rapport aux lignes s'obtiennent par transposition. $\square$

En pratique, pour calculer un déterminant, on essaiera de faire apparaître un maximum de 0 dans une de ses rangées par des opérations élémentaires et on développera par rapport à cette rangée.

Exercice 1 Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ par cette méthode, puis avec la règle de Sarrus, et comparer.