Chapitre 24

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

On considère dans ce chapitre des fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = xy^2 + xy + x + 1$ est une fonction de ce type. A un couple de réels elle associe un réel : on a par exemple $f(2, 3) = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2 + 1 = 27$.

De la même manière qu'une fonction d'une variable peut être représentée par une courbe dans $\mathbb{R}^2$, une fonction de deux variables peut être représentée par une surface de $\mathbb{R}^3$: si $f : A \to \mathbb{R}$ est une telle fonction, la surface d'équation $z = f(x, y)$ est l'ensemble des triplets $(x, y, f(x, y))$ de $\mathbb{R}^3$ avec $(x, y) \in A$.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique : si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ alors $\langle u, u' \rangle = xx' + yy'$ et $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

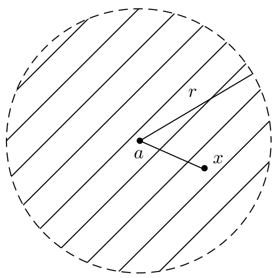
I Limites, continuité

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 1 *Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La* **boule ouverte de centre** a **et de rayon** r *est l'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}.$$

Autrement dit, $B(a, r)$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont la distance à a est strictement inférieure à r.



Définition 2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est* **ouverte***, ou que A est un* **ouvert de** $\mathbb{R}^2$*, si :*

$$\forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(a, r) \subset A.$$

Autrement dit, A est ouvert si pour tout $a \in A$ il existe une boule ouverte de centre a entièrement incluse dans A.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ privé d'un point, $\mathbb{R}^2$ privé d'une droite, une boule ouverte, un pavé ouvert du type $]a, b[\times]c, d[$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. En revanche un singleton, une droite, une boule fermée, un pavé non ouvert ne sont pas des ouverts (faire des dessins pour le voir).

2 Limite en un point

Définition 3 *Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a \in A$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f* **admet** ℓ **pour limite en** a *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, (\|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, si ℓ existe, alors il est unique. On dit que ℓ est **la limite de** f **en** a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Proposition 1 *Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_a f = \ell_1$ et que $\lim\limits_a g = \ell_2$, alors $\lim\limits_a (f + g) = \ell_1 + \ell_2$, $\lim\limits_a \alpha f = \alpha \ell_1$ et $\lim\limits_a (f \times g) = \ell_1 \times \ell_2$. Si, de plus, $\ell_2 \neq 0$, alors $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Proposition 2 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) deux fonctions. Si $\lim\limits_{x \to x} f(x) = c$ et que $\lim\limits_{t \to c} \varphi(t) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} (\varphi \circ f)(x) = \ell$.*

3 Continuité

Définition 4 *Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in A$. On dit que f est* **continue en** *a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est* **continue sur** *A si elle est continue en tout point de A.*

On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur A.

Proposition 3 *Si f et g sont continues en a (resp. sur A), alors $f + g$, αf (où $\alpha \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ aussi. Si, de plus, g ne s'annule pas en a (resp. sur A), alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a (resp. sur A).*

Ainsi, les fonctions polynomiales de deux variables (comme par exemple $f : (x, y) \mapsto 3x^2y - 2xy + y - 1$) sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et les fonctions rationnelles (quotients de deux fonctions polynomiales) sont continues là où elles sont définies.

Proposition 4 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) deux fonctions telles que $f(A) \subset I$. Si f est continue sur A et que φ est continue sur I, alors $\varphi \circ f$ est continue sur A.*

II Dérivées partielles

Dans tout le paragraphe, A désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

1 Définition

Définition 5 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(x_0, y_0) \in A$. Les* **dérivées partielles de** *f* **en** *(x_0, y_0), notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, sont définies par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y\to b} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

si ces limites existent.

Remarques :

1) On reconnaît des taux d'accroissements de fonctions d'une variable. On voit ainsi que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la dérivée en y_0 de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$.

2) On peut se ramener à des limites en 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

3) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont définies pour tout $(x_0, y_0) \in A$, alors on peut définir les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x} : A \to \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ que l'on appelle **fonctions dérivées partielles de** f .

D'après la remarque 1), $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se calcule en fixant y et en dérivant $f(x, y)$ par rapport à x et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ se calcule en fixant x et en dérivant f par rapport à y.

Exemple : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3x^2y - x \cos y$.

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - \cos y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + x \sin y$.

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 6 *On dit que $f : A \to \mathbb{R}$ est* **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** *A si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur A.*

Ainsi la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2y - x\cos y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 Gradient

Définition 7 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(x_0, y_0) \in A$. Si les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) existent, alors on appelle* **gradient de** f **en** (x_0, y_0)*, et on note* $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ *ou* $\nabla f(x_0, y_0)$*, le vecteur de coordonnées* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

On note aussi parfois $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x_0, y_0)$ ou $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ pour bien préciser que le gradient est un vecteur. ∇ se lit nabla.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2y - x\cos y$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy - \cos y \\ 3x^2 + x\sin y \end{pmatrix}.$$

4 Développement limité d'ordre 1

Proposition 5 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(x_0, y_0) \in A$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in A$:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \|(x-x_0, y-y_0)\|\,\varepsilon(x,y)$$

avec $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$.

On notera simplement

$$f(x,y) \overset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$

En posant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, ce développement limité devient :

$$f(x_0+h, y_0+k) \overset{(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

Enfin, si on pose $a = (x_0, y_0)$ et $u = (h,k)$, on peut l'écrire très simplement à l'aide du gradient :

$$f(a+u) \overset{0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u\rangle + o(\|u\|).$$

Remarques :

1) Le développement limité permet d'approximer au voisinage d'un point la fonction f par une fonction affine de deux variables. Le plan d'équation

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

est appelé **plan tangent** en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x,y)$.

Exemple : pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2y - x\cos y$, le développement limité en $(0,0)$ s'écrit $f(x,y) = -x + o(\|(x,y)\|)$ donc l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ en ce point est $z = -x$.

2) L'écriture $f(a+u) \overset{0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u\rangle + o(\|u\|)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent que le gradient de f en un point donne la direction dans laquelle la fonction croît le plus vite.

5 Dérivée selon un vecteur

Définition 8 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in A$ et $u \in \mathbb{R}^2$. La* **dérivée de** f **en** a **selon le vecteur** u*, notée $D_u f(a)$, est définie par :*

$$D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

si cette limite existe.

Ainsi $D_u f(a)$ est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a+tu)$.

Proposition 6 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, alors, pour tout $a \in A$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $D_u f(a)$ existe et*

$$D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle.$$

Démonstration : Immédiat avec le développement limité de f en a. $\square$

6 Dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$

Proposition 7 *Soit $f : A \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur A. Soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $(x(t), y(t)) \in A$ pour tout $t \in I$. On pose $F(t) = f(x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $t \in I$:*

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t).$$

Démonstration : Écrire les DL d'ordre 1 de x et y en t_0 puis celui de f en $(x(t_0), y(t_0))$ pour obtenir le DL de F en t_0. $\square$

On écrira parfois à la physicienne

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

C'est la **règle de la chaîne**.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On veut calculer la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = f(t^2, t^3)$ en fonction des dérivées partielles de f. En posant $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3$ et en appliquant la formule précédente, on obtient :

$$F'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3).$$

Remarque : En posant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la formule peut s'écrire

$$F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La **ligne de niveau** λ de f est l'ensemble des couples $(x, y) \in A$ tels que $f(x, y) = \lambda$. Si γ est une courbe incluse dans cette ligne de niveau alors F est constante sur I et donc F' est nulle. On en déduit que, pour tout t, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\gamma'(t)$: on dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de f.

7 Dérivées partielles d'une fonction de la forme $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$

Proposition 8 *Soit $f : A \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $x, y : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert B de $\mathbb{R}^2$ telles que $(x(u, v), y(u, v)) \in A$ pour tout $(u, v) \in B$. On pose $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ pour tout $(u, v) \in B$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, et, pour tout $(u, v) \in B$:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\,\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\,\frac{\partial y}{\partial u}(u, v),\\
\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\,\frac{\partial y}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

On écrira parfois à la physicienne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned}$$

C'est la **règle de la chaîne**.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On veut calculer les dérivées partielles de la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de f. En posant $x(\rho, \theta) = \rho\cos\theta$ et $y(\rho, \theta) = \rho\sin\theta$ et en appliquant la formule précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, pour tout $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)=\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\times\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\times\sin\theta,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)=-\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\times\rho\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\times\rho\cos\theta.$$

8 Extremums et points critiques

Définition 9 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in A$.*

On dit que f admet un **maximum (global)** *(resp. un* **minimum (global)***) en a si $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$) pour tout $x \in A$.*

On dit que f admet un **maximum local** *(resp. un* **minimum local***) en a s'il existe une boule ouverte B de centre a incluse dans A telle que $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$) pour tout $x \in B$.*

Proposition 9 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et qu'elle admet un extremum local en $a \in A$, alors les dérivées partielles de f en a sont nulles.*

Remarques :

1) Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse.

2) Un point a de A tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=0$ est appelé **point critique de** f. Pour étudier les extrema locaux d'une fonction de deux variables, on commencera donc par déterminer ses points critiques.

Exercice 1 Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.