**Chapitre 23**

# SÉRIES

# I Généralités

## 1 Définition

**Définition 1** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

*La* **série de terme général** $u_n$ *est le couple formé des suites $(u_n)$ et $(S_n)$. On la note $\sum u_n$.*

*Le nombre $S_n$ est appelé* **somme partielle d'ordre** $n$ *de la série.*

*On dit que* **la série** $\sum u_n$ **converge** *(ou qu'elle est* **convergente***) si la suite $(S_n)$ converge. Sinon on dit qu'elle* **diverge** *ou qu'elle est* **divergente***.*

*Si la série converge, la limite de la suite $(S_n)$ est appelée* **somme de la série** $\sum u_n$ *et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque cette limite existe.

Si la suite $(u_n)$ n'est définie qu'à partir du rang $n_0$, la série est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, et sa somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence. Dans la suite on supposera toujours que $n_0 = 0$.

## 2 Exemples

• Série géométrique

Considérons la série $\sum q^n$ où $q \in \mathbb{R}$.

Sa somme partielle d'ordre $n$ est $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

Si $|q| \geqslant 1$, la suite $(S_n)$ est divergente, donc la série $\sum q^n$ diverge.

Si $|q| < 1$, la suite de terme général $q^{n+1}$ converge vers 0, donc la suite $(S_n)$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$. Par conséquent la série $\sum q^n$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

• Série de l'exponentielle

Au chapitre 15 (exercice 6) on a démontré à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ converge vers $e^x$. Cela signifie exactement que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme est $e^x$. On montrera en deuxième année que cela reste vrai pour l'exponentielle complexe :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

## 3 Condition nécessaire de convergence

**Proposition 1** *Si la série* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Démonstration :** Pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

**La réciproque est fausse**.

Considérons par exemple la série de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ mais $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1}$ (sommes télescopiques) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Autre contre-exemple : la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. En effet, on a vu que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Définition 2** *Si la suite* $(u_n)$ *ne tend pas vers* $0$, *on dit que la série* $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

## 4 Propriétés

**Proposition 2** *On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.*

En revanche, on en modifie évidemment la somme en cas de convergence.

**Démonstration :**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites qui ne diffèrent que pour un nombre fini de valeurs de $n$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. Alors la somme partielle d'ordre $n \geqslant n_0$ de la série $\sum u_n$ est $S_n = u_0 + \ldots + u_{n_0-1} + \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ et celle de la série $\sum v_n$ est $S'_n = v_0 + \ldots + v_{n_0-1} + \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ : $S_n$ et $S'_n$ ne diffèrent que d'une constante, donc la convergence ou la divergence des suites $(S_n)$ et $(S'_n)$ sont équivalentes. □

**Proposition 3** *Soit* $(u_n)$ *une suite complexe. La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries* $\sum \operatorname{Re} u_n$ *et* $\sum \operatorname{Im} u_n$ *convergent, et, dans ce cas,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$.

**Démonstration :** Passer aux sommes partielles. □

**Proposition 4** *Soient* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *deux suites réelles ou complexes et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors la série* $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

**Démonstration :** Passer aux sommes partielles. □

## 5 Reste d'une série convergente

**Définition 3** *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente. Le* **reste d'ordre** $n$ *de la série est défini par :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Il est bien défini car la série $\sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k$ converge, et pour tout $n$ on a :

$$S_n + R_n = S$$

où $S$ désigne la somme de la série. De plus, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Par exemple, si $|q| < 1$, le reste d'ordre $n$ de la série géométrique $\sum q^n$ est $\dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

## 6 Suites et séries

**Proposition 5** *La suite $(u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.*

L'étude de la convergence d'une suite peut donc toujours se ramener à l'étude de la convergence d'une série.

**Démonstration :** La somme partielle de la série est $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ (somme télescopique). □

# II Séries à termes positifs

## 1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

**Proposition 6** *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

**Démonstration :**

La suite $(S_n)$ des sommes partielles est croissante puisque, pour tout $n$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Par conséquent, si $(S_n)$ est majorée, alors elle converge, et sinon elle diverge vers $+\infty$. □

Si la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, alors on notera $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

## 2 Comparaison avec une intégrale

**Proposition 7** *Soit $f$ une fonction continue, positive et monotone sur $[n_0, +\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$). Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$.*

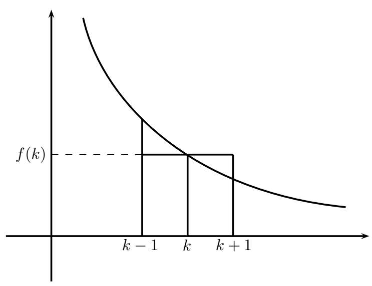
*(i) Si $f$ est décroissante, alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a l'encadrement :*

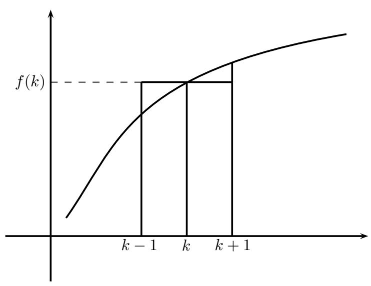
$$\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx.$$

*(ii) Si $f$ est croissante, alors , pour tout $n \geqslant n_0$, on a l'encadrement :*

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \leqslant S_n \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx.$$

**Démonstration :** *(à savoir refaire)*




Supposons $f$ décroissante.

Pour tout $k \geqslant n_0$ et pour tout $x \in [k, k+1]$ on a donc $f(x) \leqslant f(k)$. Par conséquent, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$, soit $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n$.

De même, pour tout $k \geqslant n_0 + 1$ et pour tout $x \in [k-1, k]$ on a $f(x) \geqslant f(k)$. Par conséquent, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$, soit $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \geqslant S_n - f(n_0)$.

Pour une fonction croissante, le raisonnement est analogue en changeant le sens des inégalités. □

**Exercice 1** Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$ puis de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**Corollaire 8** *Soit $f$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si la suite de terme général $\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $n \to +\infty$.*

**Démonstration :**
On reprend les notations de la proposition précédente.

Si la série converge, alors la suite $(S_n)$ est majorée et, d'après la proposition précédente, la suite de terme général $\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ aussi. Or cette suite est croissante puisque $f$ est positive. Elle est donc convergente.

Réciproquement, si la suite de terme général $\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ converge, alors elle est majorée et, d'après la proposition précédente, la suite $(S_n)$ aussi. Ainsi, d'après la proposition 6, la série converge. □

**Corollaire 9** *(Série de Riemann) Soit $\alpha$ un réel. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Attention : ici $\alpha$ est une *constante.*

**Démonstration :**
Si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, la série converge si et seulement si $\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$ a une limite finie quand $n$ tend vers $+\infty$.

Si $\alpha = 1$, $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \to +\infty$. Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ qui tend vers $\frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha > 1$ et vers $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$.

Par conséquent, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

# 3 Théorèmes de comparaison

**Proposition 10** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

*(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ aussi, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

*(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ aussi.*

**Démonstration :**
Notons $S_n$ et $S'_n$ les sommes partielles d'ordre $n$ des deux séries. Pour tout $n$, on a donc $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$. Par conséquent, si $(S'_n)$ converge, alors elle est majorée, donc $(S_n)$ également, et donc elle converge aussi. De plus, on a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} S'_n$.

En revanche, si $(S_n)$ diverge (nécessairement vers $+\infty$) alors $(S'_n)$ aussi. □

**Corollaire 11** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

*(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ aussi.*

*(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ aussi.*

En revanche, en cas de convergence, on ne peut plus comparer les sommes des deux séries.

**Démonstration :**
Soit $n_0$ un rang à partir duquel on a $u_n \leqslant v_n$. Pour tout $n \geqslant n_0$ on a donc $S_n - S_{n_0-1} \leqslant S'_n - S'_{n_0-1}$ et on conclut comme dans la démonstration précédente. □

**Proposition 12** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.*

*(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ aussi.*

*(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ aussi.*

**Démonstration :**
Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant M v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. La proposition précédente permet de conclure. □

**Proposition 13** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels strictement positifs telles que $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

**Démonstration :**
On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, donc il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$, i.e. $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3u_n}{2}$. Le corollaire 11 permet de conclure. □

**Remarque :** En fait l'hypothèse $u_n > 0$ de la proposition précédente est inutile. En effet, si $(v_n)$ est à termes strictement positifs et que $u_n \sim v_n$, alors $(u_n)$ est également à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

Pour étudier la nature d'une série à termes positifs, on pourra chercher un équivalent simple de son terme général et la comparer avec une série connue (série géométrique ou série de Riemann). En particulier, on pourra utiliser la règle dite $n^\alpha u_n$ : si $(u_n)$ est à termes positifs et qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ existe et est finie, alors la série $\sum u_n$ converge (en effet, on a dans ce cas $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$).

**Exercice 2** Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{\ln n} \ ; \ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n} \ ; \ \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n} \ ; \ \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2} \ ; \ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n} \ ; \ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln^2 n} \ ; \ \sum \left(\sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt{n^2+2}\right).$$

# 4 Règle de d'Alembert

**Proposition 14** *Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$.*

*(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*

*(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

**Démonstration :**
Supposons que $\ell < 1$. Soit $q \in ]\ell, 1[$. Alors il existe un rang $n_0$ à partir duquel on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \times \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \times q^{n-n_0}$. Or $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_0}$ (produit télescopique), donc $u_n \leqslant Cq^n$ où $C = u_0 q^{-n_0} \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ est une constante. Or $q < 1$, donc la série de terme général $Cq^n$ converge (série géométrique), et donc la série $\sum u_n$ aussi.
Supposons maintenant $\ell > 1$. Soit $q \in ]1, \ell[$. Alors il existe un rang $n_0$ à partir duquel on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \times q^{n-n_0}$, soit $u_n \geqslant Cq^n$ où $C = u_0 q^{-n_0} \prod_{k=0}^{n_0-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Or $q > 1$, donc la série de terme général $Cq^n$ diverge, et donc la série $\sum u_n$ aussi. □

La règle de d'Alembert est très pratique pour étudier la nature d'une série dont le terme général est un produit ou un quotient.

**Exercice 3** Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{n!}{n^n}$.

# 5 Séries absolument convergentes

**Définition 4** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_n$* **converge absolument***, ou qu'elle est* **absolument convergente***, ou encore que la suite $(u_n)$ est* **sommable***, si la série $\sum |u_n|$ converge.*

*Dans ce cas, la somme de la série est aussi appelée* **somme de la suite sommable** *$(u_n)$.*

**Proposition 15** *Si $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge, et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.*

**Démonstration :**
Supposons d'abord que $(u_n)$ est à valeurs réelles.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $S_n^+ = \sum_{k=0}^{n} \max(0, u_k)$ (c'est la somme des termes positifs de la suite), $S_n^- = \sum_{k=0}^{n} \min(0, u_k)$ (c'est la somme des termes négatifs de la suite) et $T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. On a alors $S_n = S_n^+ + S_n^-$ et $T_n = S_n^+ - S_n^-$.

Pour tout $n$ on a $S_n^+ \leqslant T_n$. Or la suite $(T_n)$ converge, donc elle est majorée, et donc la suite $(S_n^+)$ est également majorée. Comme elle est croissante, elle converge. Puisque $T_n = S_n^+ - S_n^-$, la suite $(S_n^-)$ converge également et, puisque $S_n = S_n^+ + S_n^-$, la suite $(S_n)$ aussi.

Supposons maintenant que $(u_n)$ est à valeurs complexes. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries (réelles) $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent. Or pour tout $n$ on a $|\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$, donc ces deux séries convergent absolument, et donc, d'après ce qui précède, elles convergent.

L'inégalité triangulaire $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ s'obtient en passant à la limite dans l'inégalité $\left|\sum_{n=0}^{p} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{p} |u_n|$. □

**La réciproque est fausse.** Par exemple, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge (cf exercice) mais elle ne converge pas absolument puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Une série qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite **semi-convergente**.

**Proposition 16** *Soient $(u_n)$ une suite complexe et $(v_n)$ une suite de réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$ au voisinage de $+\infty$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.*

**Démonstration :** Conséquence immédiate de la proposition 12. □

## 6 Critère spécial des séries alternées

**Proposition 17** *Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $(-1)^n u_n$ est de signe constant. Si la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Par exemple, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie ce critère, donc elle converge (alors qu'elle ne converge pas absolument).

**Démonstration :**

Supposons que les termes de rang pair de la suite $(u_n)$ sont positifs et que ceux de rang impair sont négatifs. Notons $S_p$ la somme partielle d'ordre $p$ de la série. On va montrer que les suites $(S_{2p})$ et $(S_{2p+1})$ sont adjacentes.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+2} + u_{2p+1} \leqslant 0$ car l'inégalité $|u_{2p+2}| \leqslant |u_{2p+1}|$ donne $u_{2p+2} \leqslant -u_{2p+1}$. La suite $(S_{2p})$ est donc décroissante. De même, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+3} + u_{2p+2} \geqslant 0$ car l'inégalité $|u_{2p+3}| \leqslant |u_{2p+2}|$ donne $-u_{2p+3} \leqslant u_{2p+2}$. La suite $(S_{2p+1})$ est donc croissante. Enfin, $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \to 0$ quand $p \to +\infty$.

Les suites $(S_{2p})$ et $(S_{2p+1})$ sont donc adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers la même limite, et la suite $(S_p)$ aussi. □

# III Développement décimal d'un réel

**Proposition 18** *Pour tout réel $x$ il existe une suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ d'entiers compris entre 0 et 9 telle que :*

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}.$$

*$d_n$ est la $n^e$* **décimale** *de $x$, et l'écriture ci-dessus est un* **développement décimal de** *$x$. Si $x$ n'est pas un décimal, ce développement est unique. Si $x$ est un décimal, il a deux développements décimaux distincts.*

Par exemple, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309\ldots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots$ (développement unique) alors que $2{,}3 = 2{,}3000\ldots$ et $2{,}3 = 2{,}2999\ldots$ a deux développements décimaux (le premier est dit propre, le second impropre).

**Démonstration :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ et pour tout $n \geqslant 1$, on pose $d_n = p_n - 10p_{n-1}$ (voir aussi la proposition 5 du chapitre 7).

On a $10^n x - 1 < p_n \leqslant 10^n x$ et $10^{n-1} x - 1 < p_{n-1} \leqslant 10^{n-1} x$ donc $-10^n x \leqslant -10p_{n-1} < -10^n x + 10$, et donc $-1 < p_n - 10p_{n-1} < 10$, d'où $d_n \in \{0, \ldots, 9\}$.

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n}{10^n}$ converge puisque $\frac{d_n}{10^n} \leqslant 10 \left(\frac{1}{10}\right)^n$ pour tout $n$. Montrons que sa somme vaut $x - \lfloor x \rfloor$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{p_n}{10^n} - \frac{p_{n-1}}{10^{n-1}}\right) = \frac{p_N}{10^N} - p_0 = \frac{p_N}{10^N} - \lfloor x \rfloor$. Or $10^N x - 1 < p_N \leqslant 10^N x$, donc $\lim_{N \to +\infty} \frac{p_N}{10^N} = x$ par le théorème des gendarmes. On a donc bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x - \lfloor x \rfloor$.

Étudions maintenant l'unicité de la suite $(d_n)$ : supposons qu'il existe une autre suite $(d'_n) \in \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_n}{10^n}$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par 10, on obtient $d_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{10^n} = d'_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_{n+1}}{10^n}$.

Or les $d_{n+1}$ sont compris entre 0 et 9 et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$, donc la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{10^n}$ est nulle si les $d_{n+1}$ sont tous nuls, vaut 1 si les $d_{n+1}$ sont tous égaux à 9 et est comprise strictement entre 0 et 1 sinon. Même chose pour l'autre somme.

On a donc trois possibilités : soit $d_1 = d'_1 + 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = 0$ et $d'_n = 9$, soit $d_1 + 1 = d'_1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = 9$ et $d'_n = 0$, soit $d_1 = d'_1$.

En itérant le procédé, on conclut que :

- soit $d_n = d'_n$ pour tout $n$,
- soit il existe un rang $n_0$ tel que $d_{n_0} = d'_{n_0} + 1$, et, pour tout $n \geqslant n_0$, $d_n = 0$ et $d'_n = 9$,
- soit il existe un rang $n_0$ tel que $d_{n_0} + 1 = d'_{n_0}$, et, pour tout $n \geqslant n_0$, $d_n = 9$ et $d'_n = 0$.

Les deux derniers cas correspondent aux nombres décimaux. □

**Proposition 19** *Un réel $x$ est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.*

Par exemple, $\dfrac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, $\dfrac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$, $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$ On se convaincra de la périodicité de ces développements en effectuant les divisions euclidiennes qui permettent de calculer les décimales.

Réciproquement, si $x = 0{,}748748\ldots$ par exemple, alors $1000x = 748{,}748\ldots$, donc $1000x - 748 = x$, d'où $x = \dfrac{748}{999}$.

On admet le résultat dans le cas général.