

Devoir n°32 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = x \operatorname{ch} x$ et $g(x) = x \operatorname{sh} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions ch , sh , f et g .

- 1) a) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels. Déterminer le développement limité de $\alpha \operatorname{ch} + \beta \operatorname{sh} + \gamma f + \delta g$ à l'ordre 3 en 0.
b) En déduire que la famille $\mathcal{B} = (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, f, g)$ est une base de F .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in F$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $T_\lambda(h)(x) = xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$.

- 2) a) Calculer $T_\lambda(\operatorname{ch})$, $T_\lambda(\operatorname{sh})$, $T_\lambda(f)$ et $T_\lambda(g)$.
b) Montrer que T_λ définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice dans la base \mathcal{B} .
c) Calculer le déterminant de T_λ . Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme T_λ est-il bijectif?
d) Déterminer le rang de T_λ en fonction de λ .
e) Déterminer le noyau et l'image de T_0 puis de T_2 .

EXERCICE 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A et Id l'application identité de \mathbb{R}^4 .

- 1) Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^4 .
- 2) Calculer A^2 , A^3 et A^4 . En déduire A^{4n} , A^{4n+1} , A^{4n+2} et A^{4n+3} pour tout entier naturel n .
- 3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
- 4) Soit g l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A^2 .
 - a) Montrer que $g \circ g = \operatorname{Id}$. Quelle est la nature de g ?
 - b) Déterminer une base (u_1, u_2) de $\operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id})$ et une base (v_1, v_2) de $\operatorname{Ker}(g + \operatorname{Id})$.
 - c) Montrer que la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^4 et écrire les matrices de g puis de f dans cette base.

5) À tout couple (a, b) de réels, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$. Soit $F = \{M(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a, b)$ soit inversible.
- b) Déterminer le rang de la matrice $M(a, b)$ en fonction de a et b .
- c) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner une base.
- d) F est-il stable par le produit matriciel?

e) Développer $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$ et en déduire les valeurs de $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ et de $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

f) Calculer $(M(a, b))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.