Devoir n°34 (non surveillé)

EXERCICE

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = bD_n + a^{n+1}$.

2) En déduire que $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ si $a \neq b$ et $D_n = (n+1)a^n$ si $a = b$.

PROBLÈME - Une marche aléatoire dans $\mathbb{C}$

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i2\pi/3}$.

1) a) Vérifier que $j^3 = 1$ et que $1+j+j^2 = 0$. Que dire du triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j et j^2 ?

b) Montrer que la famille $(1, j)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

c) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

2) On lance un dé à six faces bien équilibré. On note F le nombre obtenu et on pose $Z = j^F$. Déterminer la loi de Z.

Dans la suite du problème, on considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et on lance n fois le dé. On note F_k le résultat du k-ième lancer et on pose $Z_k = j^{F_k}$. On pose $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ et $p_n = P(S_n = 0)$. On note U_n (respectivement V_n et W_n) la variable aléatoire égale au nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $Z_k = 1$ (respectivement $Z_k = j$ et $Z_k = j^2$). Enfin, soit X_n le nombre de $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $S_k = 0$.

3) Dans cette question uniquement on suppose que les résultats des premiers lancers sont 5, 3, 4, 1, 2, 3. Donner les valeurs prises par Z_n, S_n, U_n, V_n, W_n et X_n pour $n \in [\![1, 6]\!]$.

4) a) Que vaut $U_n + V_n + W_n$?

b) Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2W_n$ et en déduire que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.

c) En déduire que si n n'est pas un multiple de 3, alors $p_n = 0$.

5) On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 3m$.

a) Reconnaître la loi de U_n et en déduire que $P(U_n = m) = \dbinom{3m}{m}\dfrac{2^{2m}}{3^{3m}}$.

b) Reconnaître la loi conditionnelle de V_n sachant $U_n = m$ et en déduire que $P(V_n = m \,|\, U_n = m) = 2^{-2m}\dbinom{2m}{m}$.

c) Montrer alors que $p_{3m} = 3^{-3m}\dbinom{3m}{m}\dbinom{2m}{m}$ puis que $\dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \dfrac{(3m+1)(3m+2)}{9(m+1)^2}$.

d) Montrer enfin que $\dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}} \geqslant \dfrac{m}{m+1}$ et en déduire que $p_{3m} \geqslant \dfrac{2}{9m}$.

6) On pose $Y_1 = X_1$ et, pour tout entier $i \geqslant 2$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$.

a) Justifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.

b) En déduire que $E(X_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

7) Le processus étudié ci-dessus est un exemple de **marche aléatoire** : on part de l'origine et à chaque étape on avance au hasard d'un pas dans la direction de 1, de j ou de j^2. Le point d'affixe S_n est le point que l'on atteint après n pas, p_n est la probabilité que l'on revienne au point de départ à la n-ième étape et X_n est le nombre de fois que l'on repasse par 0 au cours des n premières étapes. Pour représenter graphiquement cette marche aléatoire, on peut utiliser le module `turtle` de Python. On pourra tester par exemple le code suivant :

```
from turtle import *
forward(100)  # fait avancer la tortue de 100 pixels
left(45)  # fait tourner la tortue de 45 degrés vers la gauche
forward(100)
right(135)  # fait tourner la tortue de 135 degrés vers la droite
forward(100)
```

Écrire une fonction `marche` qui, recevant un entier naturel n, simule les n premières étapes de la marche aléatoire étudiée. On pourra utiliser l'instruction `speed(0)` pour accélérer la tortue.