Fiche d'exercices : Variables aléatoires

Exercice 1 Un dé est truqué de telle sorte que la probabilité de sortie de chacune de ses faces est proportionnelle au numéro de cette face. On lance le dé et on note X le résultat obtenu. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire toutes les boules l'une après l'autre, sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui de la première boule noire. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 3 Une loterie vend n billets dont m sont gagnants. On achète k billets.

1) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant ?

2) Soit X le nombre de billets gagnants obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 4 Roméo envoie des lettres à Juliette selon la règle suivante : s'il lui en envoie une le jour n, il y a une chance sur deux pour qu'il en envoie une le lendemain. Sinon, il lui écrit à coup sûr le lendemain. Aujourd'hui (jour 0), il en envoie une.

1) Soit X_n la variable aléatoire valant 1 si Roméo envoie une lettre le jour n et 0 sinon. Déterminer la loi de X_n.

2) Combien de lettres Juliette peut-elle s'attendre à recevoir en un an ?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ telle que $P(X=k)=\dfrac{\lambda}{k+1}\dbinom{n}{k}$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

1) Quelle est la valeur de λ ?

2) Calculer $E(X+1)$ et en déduire $E(X)$.

3) Calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$. Montrer que l'espérance de X vérifie $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k)$.

Exercice 7 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire successivement et avec remise p boules et on note X le plus grand numéro obtenu. Calculer $P(X\leqslant k)$ puis $P(X=k)$. Calculer $E(X)$, étudier les cas $p=1$ et $p=2$ et donner un équivalent de $E(X)$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 8 On lance quatre fois une pièce non truquée. Soit X le nombre de piles obtenus et Y le nombre de changements (par exemple, dans le tirage PFPP on a $X=3$ et $Y=2$). Déterminer la loi du couple (X,Y) et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 Une urne contient quatre boules blanches, deux noires et quatre rouges. On extrait simultanément trois boules de cette urne. Soient X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules noires obtenues. Déterminer la loi du couple (X,Y) et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 10 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y)^2\leqslant V(X)V(Y)$ (on pourra considérer $V(\lambda X+Y)$).

Exercice 11 Deux avions A et B ont respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont indépendants et ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion s'écrase si la moitié au moins de ses moteurs tombent en panne. Quel avion choisir ?

Exercice 12 On tire successivement cinq boules d'une urne contenant deux boules blanches et huit boules noires. On note X le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X :

1) Lorsque le tirage s'effectue avec remise.

2) Lorsque le tirage s'effectue sans remise.

Exercice 13 Un QCM est composé de n questions. Pour chaque question il y a k réponses possibles, dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,5 points. La note finale peut être négative. En moyenne, quelle note obtiendra un candidat qui répond au hasard à toutes les questions ?

Exercice 14 Deux joueurs lancent n fois chacun une pièce non truquée. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.

Exercice 15 Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{B}(2n,1/2)$. Déterminer la loi de $|X-n|$.

Exercice 16 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers. Déterminer les lois de $X+Y$ et de $\max(X,Y)$ dans les cas suivants :

1) $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(q)$.

2) X et Y suivent la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.

Exercice 17 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$. Calculer $E(Y/X)$.

Exercice 18 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 19 On choisit au hasard des noms dans une liste qui en contient n, chaque nom ayant une probabilité p d'être choisi. Puis on recommence avec la liste des noms non choisis. On note respectivement X et Y le nombre de noms obtenus au premier et au second tirage. Déterminer la loi de X, calculer $P(Y=k\,|\,X=i)$ et en déduire la loi de $X+Y$.

Exercice 20 Soit X une variable aléatoire finie d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{R}_+^*$, $P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)\geqslant 1-\dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 21 *(Loi faible des grands nombres)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles finies indépendantes et de même loi, d'espérance μ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $\overline{X}_n=(X_1+\ldots+X_n)/n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|\geqslant\varepsilon)=0$.