Fiche d'exercices : Produit scalaire

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles définissent un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. $\varphi_1 : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0)$
2. $\varphi_2 : (P,Q) \mapsto P(0)P(1) + Q(0)Q(1)$
3. $\varphi_3 : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$
4. $\varphi_4 : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$

Exercice 2 Montrer que l'application $\varphi : (f,g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,1])$.

Exercice 3 Montrer que : $\forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 4 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 5 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 6 Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leqslant (b-a)\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 7 Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^n P(x_i)Q(x_i)$ est un produit scalaire.

2) Pour tout $j \in \{0,\ldots,n\}$ on pose $L_j = \displaystyle\prod_{k\neq j} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$. Montrer que la famille $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 8 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P,Q\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it})Q(e^{-it})dt$.

1) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, appliquer la méthode de Schmidt à la famille $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$.

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on pose $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,3,4)$.

1) Déterminer une base orthonormale de F.

2) Déterminer une base de $F^\perp$.

3) Calculer la distance de $w = (1,0,0,0)$ à F.

Exercice 11 Pour tous $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Calculer $\langle X^m, X^n\rangle$ pour tous $m,\ n \in \mathbb{N}$.

3) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.

4) Déterminer l'image de X^3 par la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.

5) Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12

1) Montrer que l'application $\langle .,. \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

2) Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

3) Montrer que : $\forall\,A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{Tr}\,A)^2 \leqslant n\,\mathrm{Tr}({}^tAA)$.

4) Montrer que : $\forall\,A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$.

5) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7) Soit $\|.\|$ la norme associée à $\langle .,. \rangle$. Montrer que : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Exercice 13 Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces de E. Montrer que :

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \ ;\ (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \ ;\ (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 14 On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Déterminer l'orthogonal de $\{f \mid f(0) = 0\}$ et celui de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 15 Calculer $\displaystyle\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x\sin t + y\cos t - t)^2\,dt$.

Exercice 16 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 17 Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que : $\forall\,x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2$. Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 18 Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$.

1) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormale de E est symétrique.

2) Montrer que $(\mathrm{Ker}\,f)^\perp = \mathrm{Im}\,f$ et que $(\mathrm{Im}\,f)^\perp = \mathrm{Ker}\,f$.