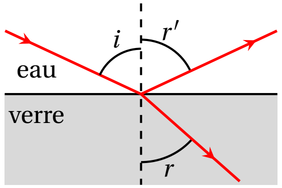
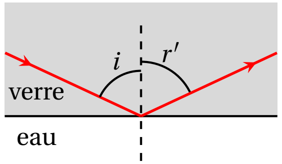
TD1 : Lois de Snell-Descartes - corrigé

Application 1

Dioptre eau-verre : On se trouve dans le cas $n_2 > n_1$ (le rayon incident se dirige vers un milieu plus réfringent) donc le rayon se réfracte nécessairement et s'approche de la normale. On calcule l'angle de réfraction : $r = \arcsin\left(\frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}}\sin i\right) = 48,5°$.

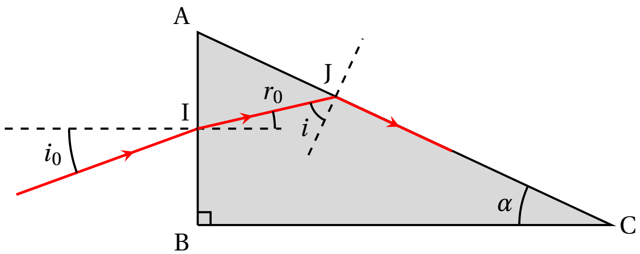


Dioptre verre-eau : Le rayon incident se dirige vers un milieu moins réfringent. On calcule l'angle de réflexion totale : $I_{\text{tot}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{verre}}}\right) = 55,7°$. On constate que $i > I_{\text{tot}}$: il y a réflexion totale, seul le rayon réfléchi émerge du dioptre.



Application 2

On commence par schématiser la situation. On se place dans le cas limite d'une réfraction rasante en J, au niveau de l'hypoténuse.



Dans ce cas particulier $i = I_{\text{tot}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 40,2°$. On détermine ensuite r_0 en sommant les angles du triangle AIJ :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - r_0 + \frac{\pi}{2} - i = \pi \iff r_0 = \frac{\pi}{2} - i - \alpha = 24,8°$$

On détermine alors i_0 en appliquant la loi de la réfraction en I : $i_0 = \arcsin(n \sin r_0) = 40,6°$. On justifie enfin qu'il s'agit de la valeur maximale de i_0 permettant la réflexion totale. D'après la loi de la réfraction en I, l'angle r_0 varie dans le même sens que i_0 (si i_0 augmente alors r_0 augmente aussi, et inversement). Par ailleurs d'après la relation $r_0 = \frac{\pi}{2} - i - \alpha$, l'angle i varie dans le sens contraire de r_0, donc de i_0.

On vient de voir que $i = I_{\text{tot}}$ lorsque $i_0 = 40,6°$ et que si i_0 diminue alors i augmente. On en déduit que :

$$i_0 < 40,6° \iff i > I_{\text{tot}}$$

La valeur maximale de l'angle d'incidence en I qui conduit à une réflexion totale sur l'hypoténuse est $\boxed{i_{0,\max} = 40,6°}$.

Remarque : Dans certains cas, pour simplifier les calculs, il est préférable d'effectuer des applications numériques successives plutôt que de chercher une expression littérale exacte. Dans le cas présent vous pouvez vérifier que l'expression exacte de l'angle d'incidence limite est $i_{0,\max} = \arcsin(n\cos(\alpha + \arcsin(1/n)))$.

⚠ Lorsque vous effectuez des applications numériques successives à la calculatrice, **gardez en mémoire les valeurs exactes** d'un calcul sur l'autre afin d'éviter de propager des erreurs d'arrondi.

⋆ Exercice 1 : Réfraction dans un prisme

1. Le rayon arrive sous incidence normale sur le dioptre AB, donc **il est réfracté sans être dévié**. Le rayon réfléchi subit une déviation de 180°.

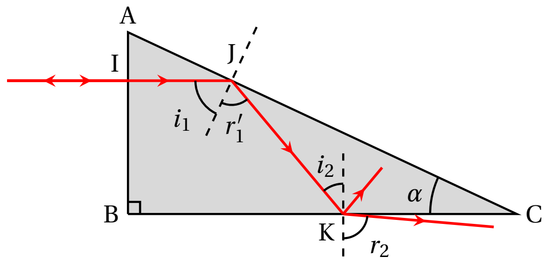
2. Le rayon qui atteint le dioptre AC se dirige vers un milieu moins réfringent ($n_{\text{air}} < n$). On détermine l'angle d'incidence i_1 sur le dioptre AC (voir figure ci-dessous). On utilise pour cela le fait que le triangle AIJ est rectangle en I : $i_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha = 65,0°$. On calcule ensuite l'angle de réflexion totale sur ce dioptre : $I_{\text{tot}} = \arcsin(n_{\text{air}}/n) = 40,2°$. On constate que $i_1 > I_{\text{tot}}$: **il y a réflexion totale sur l'hypoténuse**.

3. On détermine l'angle d'incidence i_2 sur le dioptre BC en sommant les angles du triangle JKC :

$$\frac{\pi}{2} - r_1' + \frac{\pi}{2} + i_2 + \alpha = \pi \iff i_2 = r_1' - \alpha$$

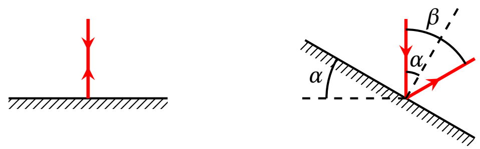
D'après la loi de la réflexion en J : $r_1' = i_1$ donc $i_2 = i_1 - \alpha = 40°$. On a $i_2 < I_{\text{tot}}$ au point K donc **il y a réfraction à travers le dioptre BC**. On calcule l'angle de réfraction : $r_2 = \arcsin(n \sin i_2) = 85,1°$.

On résume ces résultats sur la figure ci-dessous :



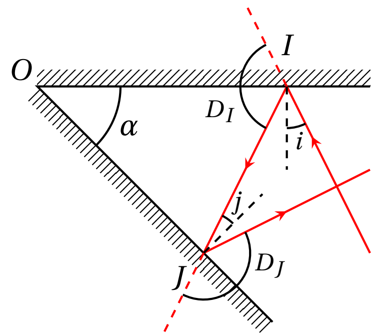
⋆ Exercice 2 : Rotation d'un miroir plan

On représente schématiquement ci-dessous les deux situations :



Par rotation du miroir d'un angle α, on reconnaît que le rayon incident arrive désormais avec un angle d'incidence α sur le miroir. D'après la loi de la réflexion, on reconnaît aisément que la déviation angulaire β du rayon réfléchi vérifie : $\boxed{\beta = 2\alpha}$.

⋆ Exercice 3 : Déviation par un système de deux miroirs



1. D'après la figure ci-dessus et en utilisant la loi de la réflexion en I, on montre que :

$$D_I + 2i = \pi \iff \boxed{\boldsymbol{D_I = \pi - 2i}}$$

De la même manière, on peut montrer que $\boxed{\boldsymbol{D_J = \pi - 2j}}$.

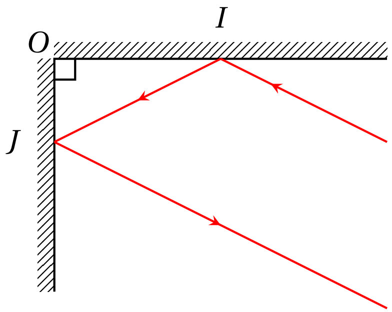
2. En utilisant les normales aux points I et J, on voit aisément que $\widehat{OIJ} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{OJI} = \frac{\pi}{2} - j$. En sommant les angles du triangle OIJ, on obtient :

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - j = \pi \iff \boxed{\boldsymbol{\alpha = i + j}}$$

3. La déviation totale est la somme des déviations successives en I et J :

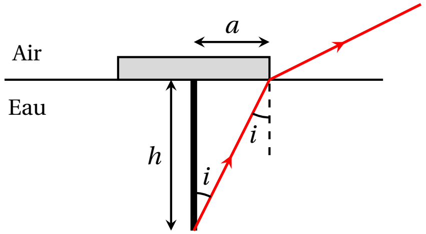
$$D = D_I + D_J = 2\pi - 2i - 2j \iff \boxed{\boldsymbol{D = 2(\pi - \alpha)}}$$

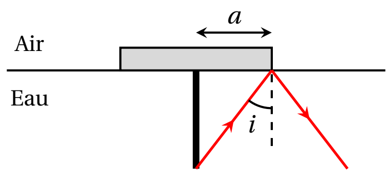
4. Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alors $D = \frac{3\pi}{2}$. Le rayon émergent est **orthogonal** au rayon incident (voir figure ci-dessus).
Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $D = \pi$. Le rayon émergent est **parallèle** au rayon incident, mais se propage **en sens opposé** (voir figure ci-dessous).



⋆⋆ Exercice 4 : Bouchon de liège

L'épingle est visible si la lumière qu'elle diffuse arrive à pénétrer dans l'air pour atteindre l'observateur. Pour ce faire elle doit traverser le dioptre eau-verre par réfraction. Celle-ci n'est pas garantie car l'air est moins réfringent que l'eau ($n_{\text{air}} < n_{\text{eau}}$) donc il pourrait y avoir **réflexion totale** (dans ce cas la lumière est réfléchie vers le fond du récipient sans pénétrer dans l'air). On trace ci-dessous deux figures représentant des situations où la pointe de l'épingle est soit visible de l'extérieur, soit invisible.





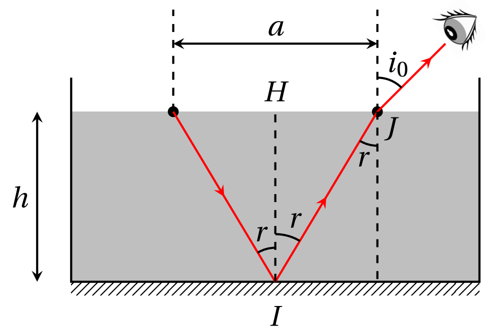
Notons que, parmi tous les points de l'épingle et tous les points d'incidence à la surface de l'eau possibles, l'angle d'incidence sur le dioptre eau-air est minimal pour un rayon issu de la pointe de l'épingle et passant par le bord du bouchon. L'épingle est donc invisible tant que l'angle i représenté sur les figures ci-dessus est strictement supérieur à l'angle de réflexion totale : $i > \arcsin(1/n)$.

On relie $\sin i$ à h et a en utilisant une relation de trigonométrie et le théorème de Pythagore : $\sin i = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. On réécrit la condition de réflexion totale en fonction du paramètre h :

$$i > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \iff \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} > \frac{1}{n} \iff h < a\sqrt{n^2-1}$$

La hauteur maximale pour que l'épingle soit invisible est $\boxed{h_{\max} = a\sqrt{n^2-1}}$.

⋆⋆ Exercice 5 : Mesure de l'indice de réfraction d'un liquide



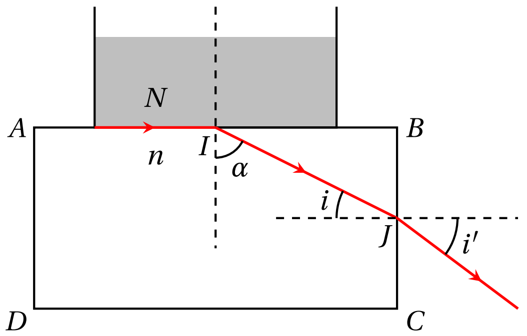
1. On montre, avec le tracé ci-dessus, que si la valeur de h est bien choisie alors l'observateur, en regardant dans la direction du fil le plus proche, voit se superposer à ce fil l'image de l'autre fil, formée par le système optique constitué de l'épaisseur de liquide et du miroir plan.

2. D'après la loi de la réfraction en J : $n \sin r = \sin i_0$. Dans le triangle IJH rectangle en H, on peut écrire :

$$\sin r = \frac{HJ}{IJ} = \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2+h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}} \iff \boxed{n = \frac{\sin i_0}{\sin r} = \sin i_0 \sqrt{1+\frac{4h^2}{a^2}}}$$

AN : $\boxed{\boldsymbol{n = 1,33}}$.

★★ Exercice 6 : Réfractomètre d'Abbe



1. Puisque le rayon se réfracte en I sous incidence rasante, alors $\alpha = I_{\text{lim}} \iff \sin\alpha = \frac{N}{n}$. Le rayon arrive ensuite en J avec un angle d'incidence $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Il se réfracte en J à condition qu'il n'y ait pas réflexion totale, c'est-à-dire que : $\sin i \leq \frac{1}{n}$.

On transforme cette inégalité en utilisant $\sin i = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{N}{n}\right)^2}$. Finalement, la condition d'émergence en J peut s'écrire :

$$\sqrt{1-\left(\frac{N}{n}\right)^2} \leq \frac{1}{n} \iff \boxed{n^2 - N^2 \leq 1}$$

2. D'après la loi de la réfraction en J : $\sin i = \sqrt{1-\left(\frac{N}{n}\right)^2} = \frac{\sin i'}{n} \iff \sin^2 i' = n^2 - N^2$. On en déduit que $\boxed{N = \sqrt{n^2 - \sin^2 i'} = 1,713}$.

★★ Exercice 7 : Dispersion de la lumière par un prisme

1. Les lois de la réfraction en I et J s'écrivent :

$$\boxed{\sin i = n \sin r} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin i' = n \sin r'}$$

2. Notons O le sommet du prisme d'angle A. On remarque que $\widehat{OIJ} = \frac{\pi}{2} - r$ et $\widehat{OJI} = \frac{\pi}{2} - r'$. En sommant les angles de OIJ, on obtient :

$$A + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' = \pi \iff \boxed{A = r + r'}$$

3. Lors de l'entrée dans le prisme, le rayon suibit une première déviation $D_I = i - r$. En sortant du prisme, il est à nouveau d'vié d'un angle $D_J = i' - r'$. La déviation totale vaut :

$$D = D_I + D_J = i + i' - r - r' \iff \boxed{D = i + i' - A}$$

4. On démontre avec un raisonnement par l'absurde que $i = i'$ **au minimum de déviation**. Imaginons que l'on observe un minimum de déviation unique D_m, pour un angle d'incidence i tel que $i' \neq i$. D'après le principe de retour inverse de la lumière, le rayon qui entre dans le prisme avec un angle i' est lui aussi dévié de l'angle D_m. Par conséquent, le minimum de déviation n'est pas unique, il y a contradiction. Au minimum de déviation, i et i' sont donc nécessairement identiques.

5. Au minimum de déviation $i = i'$ donc $\boxed{D_m = 2i - A}$.

6. On a montré à la question 1 que $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$. Puisque $i = i'$, on peut également dire que $r = r' = \frac{A}{2}$ au minimum de déviation. En utilisant le résultat de la question précédente, on arrive à la conclusion que : $\boxed{n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$.

7. Une radiation lumineuse est d'autant plus déviée que le prisme est réfringent, c'est-à-dire que son indice de réfaction est élevé. D'après la loi de Cauchy, l'indice de réfraction est une fonction décroissante de la longueur d'onde. Par conséquent, **la couleur la plus déviée est le violet et la moins déviée le rouge**.