Chapitre 3

NOMBRES COMPLEXES

I Corps des nombres complexes

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1 *Un* **nombre complexe** *est un objet mathématique de la forme*

$$z = a + ib,$$

où a et b sont des réels et i est un nombre particulier tel que $i^2 = -1$.

Le réel a est la **partie réelle** *de z, notée* $\operatorname{Re} z$*. Le réel b est la* **partie imaginaire** *de z, notée* $\operatorname{Im} z$*. L'écriture $z = a + ib$ est la* **forme algébrique** *de z.*

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarques :

1) On identifie le réel a avec le complexe $a + i0$. On peut ainsi considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

2) Si $\operatorname{Re} z = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur**. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

3) Quand on introduit un nombre complexe sous forme algébrique $a + ib$, il ne faut pas oublier de préciser que a et b sont des réels.

4) En physique, i est noté j pour éviter la confusion avec l'intensité.

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication qui étendent celles de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

et

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Calculer :

$$(2 + 3i) + (5 + 7i) \ ; \ (2 + 3i) - (5 + 7i) \ ; \ (2 + 3i) \times (5 + 7i) \ ; \ (2 + 3i)^2.$$

Proposition 1 *Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$:*

(i) $z + z' = z' + z$ *(commutativité de $+$).*

(ii) $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ *(associativité de $+$).*

(iii) $z + 0 = 0 + z = z$ *(0 est élément neutre pour $+$).*

(iv) $z \times z' = z' \times z$ *(commutativité de $\times$).*

(v) $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$ *(associativité de $\times$).*

(vi) $z \times 1 = 1 \times z = z$ *(1 est élément neutre pour $\times$).*

(vii) $\begin{cases} z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z'' \\ (z' + z'') \times z = z' \times z + z'' \times z \end{cases}$ *(distributivité de $\times$ par rapport à $+$).*

(viii) $z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)$ *($\times$ est intègre).*

Démonstration : Toutes ces propriétés se démontrent immédiatement sauf la ($viii$) qui est laissée en exercice. □

Soit $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) un complexe.

Posons $-z = -a - ib$. Alors $z + (-z) = (-z) + z = 0$: on dit que $-z$ est **l'opposé de** z.

Supposons z non nul. En remarquant que $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \neq 0$, on voit que si on pose $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ alors on a $z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$: on dit que $\frac{1}{z}$ est **l'inverse de** z (on peut aussi le noter z^{-1}).

On peut ainsi définir une soustraction et une division sur $\mathbb{C}$ par

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

et si z_2 est non nul

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}.$$

Exercice 2 Mettre $\frac{1}{2+3i}$ et $\frac{5+7i}{2+3i}$ sous forme algébrique.

Proposition 2

(i) (Somme géométrique) Pour tout $q \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}.$$

(ii) (Factorisation de $a^n - b^n$) Soient a et b deux nombres complexes et soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

(iii) (Formule du binôme) Soient a et b deux nombres complexes et soit n un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration : Les preuves sont analogues à celles vues dans le cas réel. □

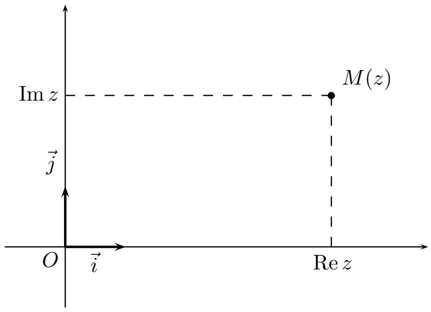
3 Représentation géométrique des nombres complexes

On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

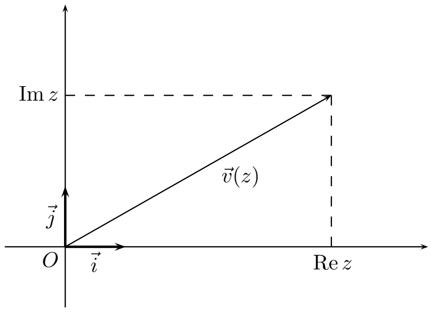
On peut alors représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur du plan, et réciproquement on peut repérer un point ou un vecteur du plan par un nombre complexe.

On peut ainsi résoudre des problèmes de géométrie à l'aide des complexes, ou interpréter géométriquement des résultats sur les complexes.

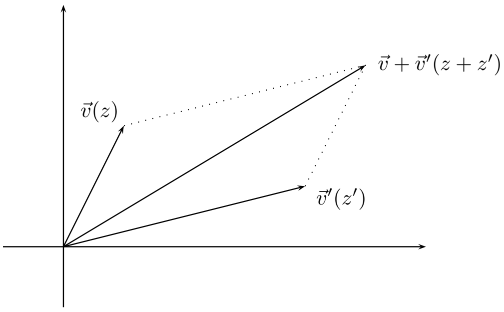
Définition 2 *Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) un complexe.* **L'image** *de z est le point M de coordonnées (a, b). On dit alors que z est* **l'affixe** *de M.*

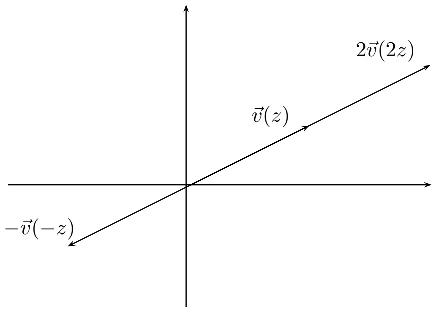


Définition 3 *Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) un complexe. Le* **vecteur image** *de z est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a, b). On dit alors que z est* **l'affixe** *de $\vec{v}$.*



Proposition 3 *Soient $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z', et soit α un réel. Le vecteur $\vec{v}+\vec{v}'$ a pour affixe $z+z'$ et le vecteur $\alpha\vec{v}$ a pour affixe αz.*





Démonstration :
Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$. Les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont donc (a,b) et (a',b') respectivement. Par conséquent les coordonnées de $\vec{v}+\vec{v}'$ sont $(a+a',b+b')$ et son affixe est $a+a'+i(b+b')=(a+ib)+(a'+ib')=z+z'$. $\square$

Proposition 4 *Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z'. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z'-z$.*

Démonstration :
Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où a, b, a' et b' sont réels. Les coordonnées de M et M' sont donc (a,b) et (a',b') respectivement. Par conséquent les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont $(a'-a,b'-b)$ et son affixe est $a'-a+i(b'-b)=(a'+ib')-(a+ib)=z'-z$. $\square$

Proposition 5 *Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.*

Démonstration :
Soient $z_A=x_A+iy_A$ et $z_B=x_B+iy_B$, avec x_A, y_A, x_B et $y_B\in\mathbb{R}$. Les coordonnées de A et B sont respectivement (x_A,y_A) et (x_B,y_B), donc les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ et son affixe est $\frac{x_A+x_B}{2}+i\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{x_A+iy_A+x_B+iy_B}{2}=\frac{z_A+z_B}{2}$. $\square$

Exercice 3 Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=4+i$ et $z_C=5+3i$, puis déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4 Soit ABC un triangle. On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que $BC=2IJ$.

4 Conjugaison

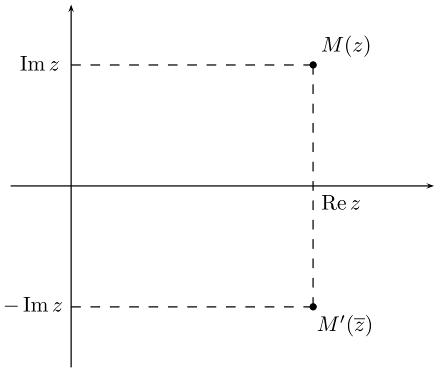
• Définition

Définition 4 *Soit $z=a+ib$ où $a,b\in\mathbb{R}$. Le* **conjugué** *de z est*

$$\overline{z}=a-ib.$$

On a donc $\operatorname{Re}\overline{z}=\operatorname{Re}z$ et $\operatorname{Im}\overline{z}=-\operatorname{Im}z$.

Dans un repère orthonormal, le point d'affixe $\overline{z}$ est l'image du point d'affixe z par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.



• Propriétés

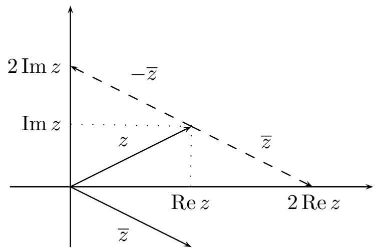
Proposition 6 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.

(iii) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ *(et donc* $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$*).*

(iv) $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$ *(et donc* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$*).*



Démonstration :
Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
(i) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a + ib = z$.
(ii) $\overline{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
(iii) $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$.
(iv) $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib$. $\square$

• Conjugaison et opérations

Proposition 7 *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:*

(i) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

(ii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

(iii) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, où a, b, a' et $b' \in \mathbb{R}$.
(i) $\overline{z+z'} = \overline{a+ib+a'+ib'} = \overline{a+a'+i(b+b')} = a + a' - i(b+b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$.
(ii) $\overline{z \times z'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')} = aa' - bb' - i(ab' + ba')$, et $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + ba')$, donc $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
(iii) D'après (i), $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} \times \overline{z} = \overline{\frac{z'}{z} \times z} = \overline{z'}$, donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.
(iv) Par récurrence immédiate pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$ il suffit d'écrire $\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{\overline{z}^{-n}} = \overline{z}^n$. $\square$

II Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1 Module d'un nombre complexe

• Définition

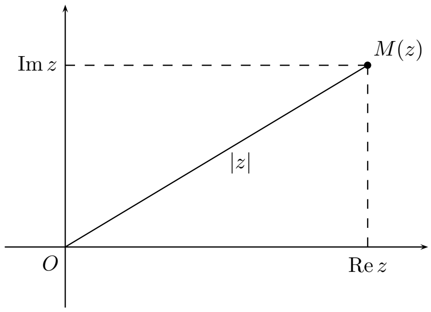
Définition 5 *Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Le* **module** *de z est le réel :*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Autrement dit $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$. Exemple : $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Remarque : Si x est un réel, le module de x est égal à sa valeur absolue (car $\sqrt{x^2} = |x|$). Il n'y a donc pas d'ambiguïté sur la notation $|x|$.

Interprétation géométrique : On munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si M est le point du plan d'affixe z, alors $|z| = OM$ (théorème de Pythagore). Si $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe z, alors $|z| = \|\vec{v}\|$.



On peut ainsi calculer des longueurs à l'aide des nombres complexes :

Proposition 8 *Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :*

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Démonstration : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. □

Exercice 5 Calculer AB et AC avec les points A, B et C de l'exercice 1.

• Propriétés

Proposition 9 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

(i) $z.\overline{z} = |z|^2$.

(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(iii) $|\overline{z}| = |z|$.

Démonstration :
Soit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
(i) $z.\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.
(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$.
(iii) $|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. □

Remarque : La formule $z.\overline{z} = |z|^2$ permet de mettre un quotient de nombres complexes sous forme algébrique : en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, celui-ci devient réel.

Exemple : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$.

• Module et opérations

Le module d'un produit est égal au produit des modules, le module d'un quotient au quotient des modules :

Proposition 10 *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:*

(i) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

(ii) Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration :
(i) $|z \times z'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}.\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$, donc $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
(ii) D'après (i), $\left|\dfrac{z'}{z}\right| \times |z| = \left|\dfrac{z'}{z} \times z\right| = |z'|$ donc $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

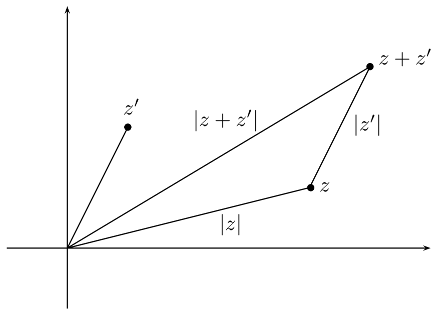
(iii) Par récurrence immédiate pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$ il suffit d'écrire $|z^n| = \left|\frac{1}{z^{-n}}\right| = \frac{1}{|z^{-n}|} = \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n$. $\square$

En revanche le module d'une somme n'est pas égal en général à la somme des modules. Par exemple, $|1| = 1$, $|i| = 1$ alors que $|1+i| = \sqrt{2}$ et non 2. On a cependant le résultat suivant, appelé **inégalité triangulaire** :

Proposition 11 *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:*

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

De plus, $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $z = \alpha z'$.



Démonstration :
Cela revient à montrer que $|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$ (car ce sont des nombres positifs).
On a : $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z}') = z\overline{z} + z\overline{z}' + z'\overline{z} + z'\overline{z}' = |z|^2 + z\overline{z}' + \overline{z\overline{z}'} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z}') + |z'|^2$.
D'autre part : $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{z}'| + |z'|^2$.
Or pour tout complexe Z on a $\mathrm{Re}\, Z \leqslant |Z|$, donc $\mathrm{Re}(z\overline{z}') \leqslant |z\overline{z}'|$, soit $\mathrm{Re}(z\overline{z}') \leqslant |z||\overline{z}'|$, d'où finalement $|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$.
De plus, pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on a ($\mathrm{Re}\, Z = |Z| \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+$), donc $|z+z'| = |z|+|z'|$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z\overline{z}' = k$. Si $z' \neq 0$, cela équivaut (en multipliant par z') à $z|z'|^2 = kz'$, soit $z = \frac{k}{|z'|^2} z'$. $\square$

Autre formule à connaître :

Proposition 12 *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z - z'| \geqslant |z| - |z'|$.*

Démonstration : D'après l'inégalité triangulaire, $|z| = |(z-z') + z'| \leqslant |z-z'| + |z'|$, et le résultat s'ensuit. $\square$

• Cercles et disques

Définition 6 *Soit A un point du plan et R un réel positif. Le* **cercle de centre** *A* **et de rayon** *R est l'ensemble des points M tels que $AM = R$. Le* **disque fermé de centre** *A* **et de rayon** *R est l'ensemble des points M tels que $AM \leqslant R$. Le* **disque ouvert de centre** *A* **et de rayon** *R est l'ensemble des points M tels que $AM < R$.*

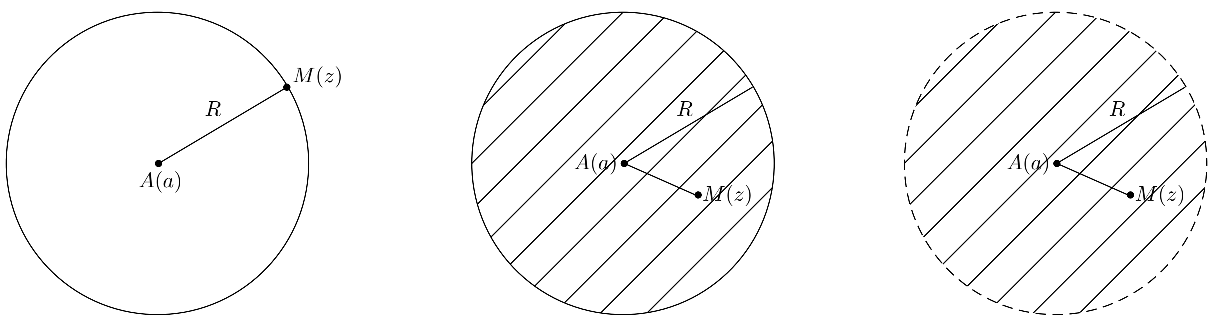
Proposition 13 *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Soit A le point d'affixe a.*

(i) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.

(ii) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a| \leqslant R$ est le disque fermé de centre A et de rayon R.

(iii) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a| < R$ est le disque ouvert de centre A et de rayon R.

Démonstration : $AM = |z_M - z_A|$. $\square$



2 Nombres complexes de module 1

• Arguments d'un nombre complexe de module 1

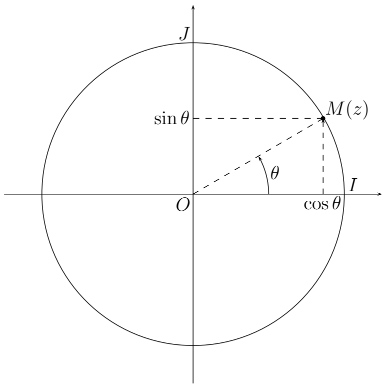
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ correspond au cercle de centre O et de rayon 1.

Si $z \in \mathbb{U}$, il existe donc un réel θ, défini à 2π près, tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Définition 7 *On dit que θ est un* **argument** *de z.*



Les arguments de z sont alors les $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Géométriquement, θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

• Notation $e^{i\theta}$

Définition 8 *Soit θ un réel. On pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*

C'est un nombre complexe de module 1. Par exemple $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

D'après ce qui précède, tout nombre complexe de module 1 est de cette forme. On peut donc écrire :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

• Propriétés

Proposition 14 *Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:*

(i) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

(ii) $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \mod 2\pi$.

(iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

(iv) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

(v) $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$.

(vi) **Formules d'Euler** *:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

(vii) **Formule de Moivre** *: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.*

La formule de Moivre peut s'écrire également :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Rappel : On dit que θ' est congru à θ modulo x, et on note $\theta' \equiv \theta \mod x$ ou $\theta' \equiv \theta\,[x]$, s'il existe un entier k tel que $\theta' = \theta + kx$.

Démonstration :

(i) On a, d'une part : $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)$.

D'autre part : $e^{i\theta}e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$.

On a donc bien $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

(ii) $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \bmod 2\pi$.

(iii) $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

(iv) D'après (iii), $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$ donc $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

(v) D'après (iii) et (iv), $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i\theta'} \times \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta'}e^{-i\theta} = e^{i(\theta'-\theta)}$

(vi) On a $\left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{array} \right.$.

En additionnant les deux lignes on obtient $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

En soustrayant la deuxième ligne de la première on obtient $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$, donc $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(vii) Récurrence si $n \in \mathbb{N}$, et écrire $e^{in\theta} = e^{-i(-n)\theta}$ puis utiliser le (iv) si $n \in \mathbb{Z}_-^*$. □

3 Arguments d'un nombre complexe non nul

• Définition

Soit z un nombre complexe non nul. Notons ρ son module.

Alors $\dfrac{z}{\rho}$ est un nombre complexe de module 1 : $\left|\dfrac{z}{\rho}\right| = \dfrac{|z|}{\rho} = \dfrac{\rho}{\rho} = 1$.

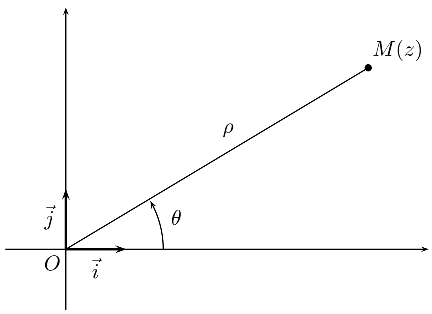
Par conséquent, il existe un réel θ défini à 2π près tel que $\dfrac{z}{\rho} = e^{i\theta}$.

Définition 9 *On dit que θ est un* **argument** *de z. On note* $\arg z = \theta$.

On a alors
$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z.

Interprétation géométrique : Soit M le point d'affixe z. Alors $\rho = OM$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Remarques :

1) Si θ est un argument de z, alors les autres arguments de z sont les $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) On appelle **argument principal** de z celui qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On le note $\operatorname{Arg} z$.

3) L'écriture $\rho e^{i\theta}$ est une forme trigonométrique de z si ρ est un réel *strictement positif*. Par exemple $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une forme trigonométrique. On peut écrire $-2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi}2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

4) Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument : l'angle $(\vec{i}, \vec{0})$ n'est pas défini.

5) Si $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$ avec $a, b, \rho, \theta \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$, on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{array} \right. .$$

qui permettent de passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.

Exercice 6 Écrire $1 + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

• Egalité de deux complexes sous forme trigonométrique

Proposition 15 *Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z = \rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho > 0$, $\rho' > 0$. Alors :*

$$z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\, \theta = \theta' + 2k\pi \end{array} \right. .$$

Ne pas oublier le $+2k\pi$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = i$.

• Arguments et opérations

Proposition 16 *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:*

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$.

(ii) $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \mod 2\pi$.

Démonstration :
Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z = \rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho > 0$, $\rho' > 0$.
(i) $zz' = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$ donc $\arg(zz') \equiv \theta + \theta' \mod 2\pi$.
(ii) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\rho' e^{i\theta'}}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{\rho'}{\rho}\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = \dfrac{\rho'}{\rho} e^{i(\theta'-\theta)}$ donc $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \theta' - \theta \mod 2\pi$. □

III Application à la trigonométrie

1 Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

L'idée est d'utiliser la formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

Exemple : Pour $n = 3$ (on rappelle que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$) :

$$\begin{array}{rcl} \cos 3\theta + i\sin 3\theta & = & (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ & = & \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \times i\sin\theta + 3\cos\theta \times i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ & = & \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ & = & (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta). \end{array}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos 3\theta & = & \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta & = & 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \end{array} \right.$$

On peut alors simplifier ces expressions en utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos 3\theta & = & \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ \sin 3\theta & = & 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta, \end{array} \right.$$

soit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos 3\theta & = & 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta & = & -4\sin^3\theta + 3\sin\theta. \end{array} \right.$$

Exercice 8 Montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos 4\theta & = & 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \\ \sin 4\theta & = & \cos\theta(-8\sin^3\theta + 4\sin\theta). \end{array} \right.$$

2 Linéarisation de $\cos^n\theta$ et de $\sin^n\theta$

D'après les formules d'Euler, $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$.

On développe, on simplifie et on regroupe les exponentielles conjuguées pour faire réapparaître des cosinus et des sinus.

Exemple : Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\\
&= \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{8}\\
&= \frac{e^{i3\theta}+3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}}{8}\\
&= \frac{e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}}{8}\\
&= \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{8}\\
&= \frac{2\cos 3\theta+6\cos\theta}{8}\\
&= \frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}\\
&= \frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\
&= \frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3}{-8i}\\
&= \frac{e^{i3\theta}-3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}}{-8i}\\
&= \frac{e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}}{-8i}\\
&= \frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}{-8i}\\
&= \frac{2i\sin 3\theta-6i\sin\theta}{-8i}\\
&= \frac{-\sin 3\theta+3\sin\theta}{4}\\
&= -\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta.
\end{aligned}$$

Exercice 9 Montrer que $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$ et que $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$.

3 Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$

On suppose $(a,b) \neq (0,0)$. On met $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right).$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On a donc :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Par exemple, $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

4 Factorisation de $1 + e^{i\theta}$ et de $e^{ia} + e^{ib}$

On veut écrire $1 + e^{i\theta}$ et $e^{ia} + e^{ib}$ sous forme $\rho e^{i\alpha}$ (mais avec ρ pas forcément positif).

Pour factoriser $1 + e^{i\theta}$, l'idée est de mettre en facteur $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et d'utiliser les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
1 + e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\\
&= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\tfrac{\theta}{2}\\
&= 2\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour factoriser $e^{ia} + e^{ib}$, l'idée est de mettre en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ et d'utiliser les formules d'Euler :

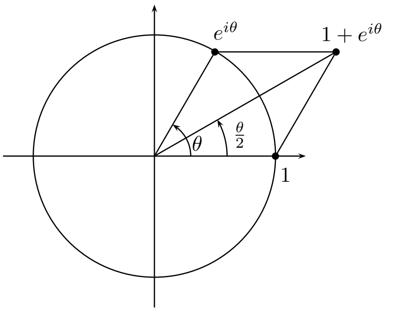
$$\begin{aligned}
e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{-a+b}{2}}\right)\\
&= e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2\cos\tfrac{a-b}{2}\\
&= 2\cos\tfrac{a-b}{2}e^{i\frac{a+b}{2}}.
\end{aligned}$$

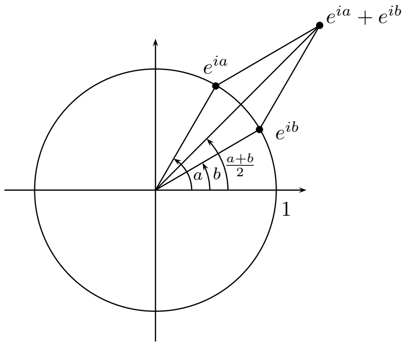
Remarques :

1) On peut retrouver ainsi les formules trigonométriques de transformation de somme en produit en prenant les parties réelles et imaginaires : on obtient $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ et $\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$.

2) De la même manière on peut montrer que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$.

3) Interprétation géométrique :





5 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin kx$

Le résultat suivant n'est pas à apprendre par cœur : il faut savoir refaire la démonstration.

Proposition 17 *Soient n un entier naturel et x un réel non congru à 0 modulo 2π. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \cos \frac{nx}{2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sin \frac{nx}{2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Démonstration :

Notons ces sommes C_n et S_n respectivement. On a $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx + i \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sum_{k=0}^{n} (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k$.

Or $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ donc $e^{ix} \neq 1$. Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = 1 + e^{ix} + \left(e^{ix}\right)^2 + \ldots + \left(e^{ix}\right)^n = \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1 - e^{ix}}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

Or $1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right) = e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin \frac{x}{2}\right)$, et, de même, $1 - \left(e^{ix}\right)^{n+1} = 1 - e^{i(n+1)x} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right) = e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}\right)$.

Par conséquent, $C_n + iS_n = \dfrac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin \frac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \dfrac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient $C_n = \cos \frac{nx}{2} \dfrac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ et $S_n = \sin \frac{nx}{2} \dfrac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. □

Remarque : Si x est congru à 0 modulo 2π, alors on a immédiatement $\sum_{k=0}^{n} \cos kx = n + 1$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin kx = 0$.

IV Équations dans $\mathbb{C}$

1 Racines n^e de l'unité

Définition 10 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une* **racine n^e de l'unité** *est un nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^e de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}.$$

Résolvons l'équation $z^n = 1$. On va chercher les solutions sous forme trigonométrique : on pose $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
z^n = 1 &\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = 1\,(= 1e^{i0}\,) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}
$$

Les racines n^e de l'unité sont donc les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où k est un entier.

Mais on remarque que, pour tout k, $e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi+2n\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}+i2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{i2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$: il suffit donc de prendre $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ pour les avoir toutes.

Proposition 18 *L'ensemble des racines* n^e *de l'unité est :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Ces nombres sont deux à deux distincts : il y a donc n racines n^e de l'unité.

Exemple :

Pour $n = 1$: $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

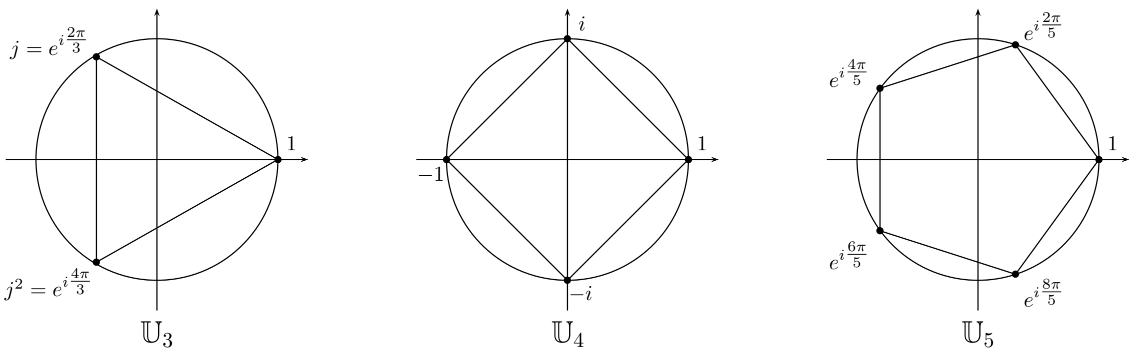
Pour $n = 2$: $\mathbb{U}_2 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{2}},\ k \in \{0, 1\} \right\} = \left\{e^{i0}, e^{i\pi}\right\} = \{1, -1\}$.

Pour $n = 3$: $\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ e^{i0}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Alors $\mathbb{U}_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$.

Pour $n = 4$: $\mathbb{U}_4 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{4}},\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\} = \left\{ e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{1, i, -1, -i\}$.

Pour $n = 5$: $\mathbb{U}_5 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\} = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}} \right\}$.

Proposition 19 *Les images des racines* n^e *de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à* n *côtés centré en* O *et inscrit dans le cercle trigonométrique.*



2 Équation $z^n = a$ $(a \in \mathbb{C})$

Définition 11 *Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Les* **racines** n^e **de** a *sont les solutions de l'équation* $z^n = a$.

Si $a = 0$, l'équation $z^n = 0$ a une solution unique : 0.

Supposons maintenant $a \neq 0$. Posons $a = re^{it}$ (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$).

On cherche les solutions de l'équation $z^n = a$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
z^n = a & \Leftrightarrow & \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = re^{it} \\
 & \Leftrightarrow & \rho^n e^{in\theta} = re^{it} \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \rho^n = r \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ n\theta = t + 2k\pi \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{t+2k\pi}{n} \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{t+2k\pi}{n}}
\end{array}$$

Comme au paragraphe précédent, il suffit de prendre $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ pour avoir toutes les solutions, et celles-ci sont deux à deux distinctes.

Proposition 20 *Tout nombre complexe a non nul a n racines n^e. Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier. De plus, si z_0 est une racine n^e de a, on obtient les autres racines en multipliant z_0 par les racines n^e de l'unité.*

Démonstration : $z^n = a \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists\, \omega \in \mathbb{U}_n, z = z_0\omega.$ □

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8i$.

3 Cas particulier : racines carrées

Un nombre complexe non nul a deux racines carrées distinctes et opposées. Pour les déterminer, on peut utiliser la forme trigonométrique comme au paragraphe précédent, mais également la forme algébrique.

L'idée est d'écrire que $z^2 = a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{array} \right.$, ce qui permet d'obtenir un système d'équations simple.

Exemple : Déterminons les racines carrées de $a = 21 - 20i$.

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
z^2 = a & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (x+iy)^2 = 21 - 20i \\ |x+iy|^2 = |21 - 20i| \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 + 2ixy = 21 - 20i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{21^2 + 20^2} \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = -20 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{array} \right. \quad \text{(identification des parties réelles et imaginaires)} \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = 50 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = -10 \end{array} \right. \quad \text{(en additionnant et soustrayant les première et troisième lignes)} \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 25 \\ y^2 = 4 \\ xy = -10 \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \text{ ou } -5 \\ y = 2 \text{ ou } -2 \\ xy = -10 \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -5 \\ y = 2 \end{array} \right. \quad \text{(pour avoir } xy = -10\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & z = 5 - 2i \text{ ou } z = -5 + 2i.
\end{array}$$

Les racines carrées de $21 - 20i$ sont donc $5 - 2i$ et $-5 + 2i$.

Remarque : Ne jamais écrire $\sqrt{z}$ si z n'est pas un réel positif. Cette notation n'a aucun sens.

Exercice 11 Déterminer les racines carrées de $17 - 144i$. On trouvera $9 - 8i$ et $-9 + 8i$.

4 Équation du second degré à coefficients complexes

Proposition 21 *Soit l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des complexes (avec $a \neq 0$).*

Soit $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** *de (E).*

Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution unique $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$. De plus, $az^2+bz+c = a(z-z_0)^2$.

Si $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ. De plus, $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

Démonstration :
Posons $P(z) = az^2+bz+c$. Alors :

$$P(z) = a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Cette dernière expression est appelée **forme canonique** de $P(z)$.
Si $\Delta = 0$, alors $P(z) = a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, donc l'équation (E) a pour unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
Si $\Delta \neq 0$, alors Δ a deux racines carrées opposées. Notons-les δ et $-\delta$. On a alors :

$$P(z) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) = a\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right),$$

donc l'équation (E) a deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$. □

Remarques :

1) Si Δ n'est pas réel on ne peut pas parler de son signe. Pour déterminer ses racines carrées, on applique la méthode du paragraphe précédent.

2) Si Δ est un réel strictement positif, on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$ et les solutions de (E) sont $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

3) Si Δ est un réel strictement négatif, on peut prendre $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$ et les solutions de (E) sont $\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (noter qu'elles sont conjuguées).

Exemple : Résolution de (E) : $z^2+(3+4i)z-7+11i=0$.

Le discriminant de (E) est $\Delta = (3+4i)^2-4(-7+11i) = 21-20i$. On a vu en IV.3. que ses racines carrées sont $5-2i$ et $-5+2i$. On en choisit une : $\delta = 5-2i$ par exemple.

Les solutions de (E) sont donc $z_1 = \dfrac{-(3+4i)-(5-2i)}{2} = -4-i$ et $z_2 = \dfrac{-(3+4i)+(5-2i)}{2} = 1-3i$.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(i-1)z+2+i=0$.

Proposition 22 *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Deux complexes z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ si et seulement si $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Démonstration :
($\Rightarrow$) Si $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de b^2-4ac, alors $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.
($\Leftarrow$) Si $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$, alors $a(z-z_1)(z-z_2) = az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2 = az^2+bz+c$, donc z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$. □

V Exponentielle complexe

1 Définition

Définition 12 *Soit $z = x+iy$ (où $x, y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.* ***L'exponentielle de*** *z est le nombre complexe noté e^z ou $\exp(z)$ défini par*

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Remarques :
1) Si z est un réel (i.e. si $y = 0$), l'exponentielle complexe de z coïncide avec son exponentielle réelle.

2) On a $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et $\arg(e^z) \equiv y \bmod 2\pi \equiv \mathrm{Im}\, z \bmod 2\pi$.

3) Comme l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe ne s'annule pas (car $|e^z| = e^x \neq 0$).

2 Propriétés

Comme l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe transforme les sommes en produits :

Proposition 23 *Pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$:*

(i) $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

(ii) $e^{z'-z} = \dfrac{e^{z'}}{e^z}$.

Démonstration :
(i) Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (avec x, y, x' et y' réels). Alors $e^{z+z'} = e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{x+x'}e^{i(y+y')}$ (par définition).
Or $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$ (exponentielle réelle) et $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$ (proposition 14), donc $e^{x+x'}e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^x e^{iy} e^{x'} e^{iy'} = e^z e^{z'}$ (par définition).
(ii) D'après (i) on a $e^{z'-z}e^z = e^{z'-z+z} = e^{z'}$, donc $e^{z'-z} = \dfrac{e^{z'}}{e^z}$. □

Proposition 24 *Pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$:*

(i) $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

(ii) $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

La notation $2i\pi\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Posons $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Pour le (ii) il suffit d'écrire que $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow e^{z-z'} = 1$. □

VI Nombres complexes et géométrie

1 Angle orienté de deux vecteurs

Proposition 25 *Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2. Alors :*

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \text{ modulo } 2\pi.$$

Démonstration :
On a $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv (\vec{v}_1, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}_2) \equiv -(\vec{i}, \vec{v}_1) + (\vec{i}, \vec{v}_2) \equiv (\vec{i}, \vec{v}_2) - (\vec{i}, \vec{v}_1) \equiv \arg(z_2) - \arg(z_1) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ modulo 2π. □

Proposition 26 *Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \text{ modulo } 2\pi.$$

Démonstration :
Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont respectivement $z_B - z_A$ et $z_D - z_C$. La proposition précédente donne le résultat. □

Exercice 13 Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -3 + i$, $z_B = 1 + 3i$, $z_C = -2 + 2i$ et $z_D = 4$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

2 Alignement et orthogonalité

Proposition 27 *Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2. Alors :*

(i) $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1}$ est un réel.

(ii) $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1}$ est un imaginaire pur.

Démonstration :
(i) $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv 0$ modulo $\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv 0$ modulo $\pi \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1}$ est un réel.

(ii) $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \equiv \frac{\pi}{2}$ modulo $\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ modulo $\pi \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1}$ est un imaginaire pur. □

Proposition 28 *Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors :*

(i) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel.

(ii) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

Démonstration :
(i) A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

(ii) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. □

Remarque : Il est intéressant de faire apparaître des rapports de la forme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ car $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

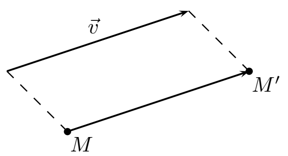
Exercice 14 Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 1 + 4i$. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Que peut-on en déduire ?

3 Transformations du plan

Définition 13 *Une* **transformation** *du plan est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ telle que tout point du plan ait un unique antécédent par f.*

• TRANSLATION

Définition 14 *Soit $\vec{v}$ un vecteur. La* **translation de vecteur** $\vec{v}$ *est l'application $t_{\vec{v}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.*



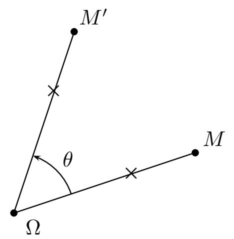
Proposition 29 *Soit a un complexe. L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z + a$ est la translation dont le vecteur a pour affixe a.*

Démonstration : Pour tout M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z + a - z = a$. □

• ROTATION

Définition 15 *Soient Ω un point et θ un réel. La* **rotation de centre Ω et d'angle θ** *est l'application $r_{\Omega,\theta} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que :*

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \bmod 2\pi \end{cases}.$$

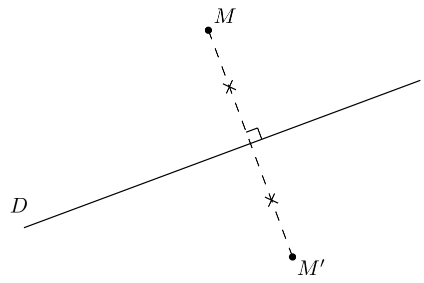


Proposition 30 *Soit θ un réel. L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.*

Démonstration : Pour tout M, on a $|e^{i\theta}z| = |z|$, donc $OM = OM'$, et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg \dfrac{e^{i\theta}z}{z} \equiv \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta \mod 2\pi$. □

• Réflexion

Définition 16 *Soit D une droite. La* **réflexion** *(ou* **symétrie orthogonale***)* **d'axe** *D est l'application $s_D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui, à tout point M, associe le point M' tel que D soit la médiatrice du segment $[MM']$ (et $M' = M$ si $M \in D$).*

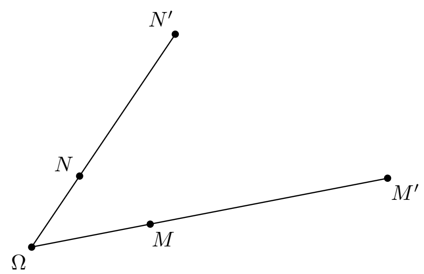


On a vu que la conjugaison complexe correspond à la réflexion d'axe (Ox).

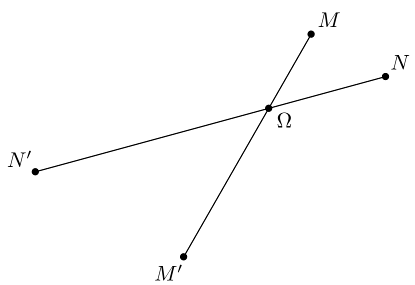
• Homothétie

Définition 17 *Soient Ω un point et k un réel non nul.* **L'homothétie de centre Ω et de rapport** *k est l'application $h_{\Omega,k} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que :*

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$



$k = 3$



$k = -2$

Proposition 31 *Soit k un réel non nul. L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe kz est l'homothétie de centre O et de rapport k.*

Démonstration : Pour tout M, on a $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. □