CHAPITRE 3 Lentilles minces

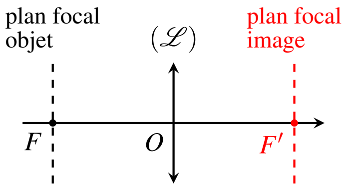
Ce chapitre introduit les outils mathématiques qui permettent de comprendre le principe de fonctionnement de quelques systèmes optiques de la vie courantes : œil, loupe, lunette astronomique, vidéoprojecteur, appareil photo, microscope, pour n'en citer que quelques uns. Nous allons voir en particulier comment étudier des systèmes à une ou deux lentilles.

1 Système à lentille unique

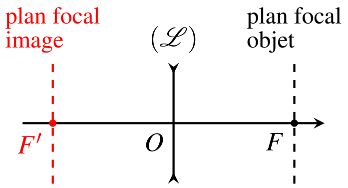
Cours

Une lentille mince est caractérisée par :

- un centre optique O ;
- deux foyers principaux : F (foyer principal objet) et F' (foyer principal image) symétriques par rapport à O ;
- deux plans focaux transverses passant par les foyers principaux ;
- une distance focale $f' = \overline{OF'}$. On définit également la vergence $V = 1/f'$, qui s'exprime en dioptries ($1\,\delta = 1\,\text{m}^{-1}$). Par exemple une vergence $V = 8\,\delta$ correspond à une distance focale $f' = \frac{1}{8}\,\text{m} = 12,5\,\text{cm}$.



Lentille mince convergente



Lentille mince divergente

On classe les lentilles minces en deux catégories :

- les lentilles convergentes ont une distance focale **positive** ;
- les lentilles divergentes ont une distance focale **négative**.

⚠ En fonction de la nature de la lentille le foyer principal image F' peut être situé derrière la lentille (lentille CV) ou bien devant (lentille DV), comme le montrent les figures ci-dessus. Il faut y être vigilant lorsque l'on effectue une construction.

Remarque : Les lentilles minces sont étudiées dans les conditions de Gauss, ce qui signifie qu'on les considère **stigmatiques** et **aplanétiques**.

La formation d'une image par un système de lentilles peut s'effectuer sous deux angles différents :

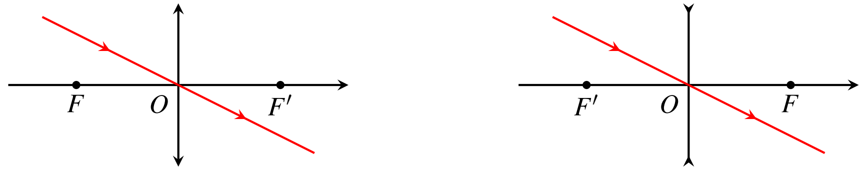
- Avec des constructions géométriques, qui consistent à tracer la marche de rayons lumineux à travers une ou plusieurs lentilles.
- Par des calculs analytiques reposant sur des relations de conjugaison et de grandissement.

Ces deux points de vue sont complémentaires ; ils aboutissent aux mêmes conclusions par des voies différentes. On va voir dans un premier temps comment les mettre en œuvre dans le cas d'un système à lentille unique.

1.1 Constructions géométriques

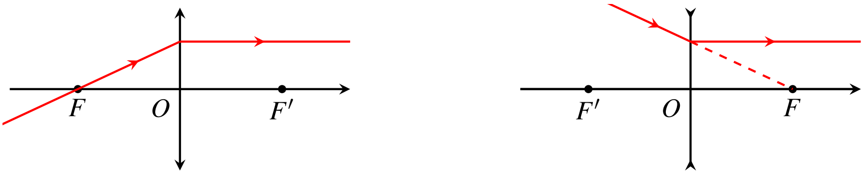
1.1.1 La base : quatre propriétés à connaître absolument

Propriété 1 : Un rayon incident qui passe par le centre optique n'est pas dévié.

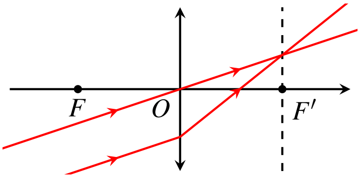


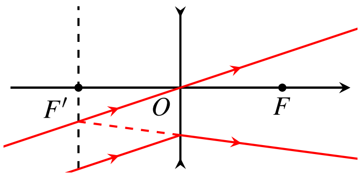
Propriété 2 : Un rayon incident parallèle à l'axe optique émerge dans la direction du foyer principal image.

Propriété 3 : Un rayon incident dans la direction du foyer principal objet émerge parallèle à l'axe optique.



Propriété 4 : Deux rayons incidents parallèles entre eux émergent en se croisant dans le plan focal image. On utilise la propriété 1 pour déterminer exactement en quel point.





⚠ Dans une lentille la majorité de la lumière est réfractée. On néglige la fraction de l'énergie lumineuse qui est réfléchie au niveau des dioptres d'entrée et de sortie. Par conséquent sur une construction géométrique un rayon lumineux ne se réfléchit **jamais** sur une lentille, il la traverse toujours !

1.1.2 Image d'un objet transverse par une lentille

On s'intéresse à un objet transverse AB avec A situé sur l'axe optique et B en dehors. On cherche son image $A'B'$ par la lentille.

En résumé

• Déterminer la nature de la lentille (regarder le signe de la distance focale si l'énoncé ne précise pas explicitement le caractère convergent ou divergent).

• Déterminer la position de l'objet par rapport à la lentille (regarder le signe de $\overline{OA}$ si l'énoncé ne précise pas explicitement la nature réelle ou virtuelle de l'objet).

• Commencer la construction en plaçant le centre optique, les foyers principaux (attention si la lentille est divergente!) et l'objet transverse. Si besoin faites un changement d'échelle pour vous adapter à la taille de votre feuille.

• Construire B' en utilisant **deux** rayons issus de B. L'image se trouve à l'intersection des rayons émergents. Utiliser deux au choix parmi les propriétés 1, 2 et 3.

• Comme la lentille est aplanétique $A'B'$ est transverse, ce qui permet de situer A' (qui est forcément sur l'axe optique car son conjugué appartient à l'axe optique).

Exemple

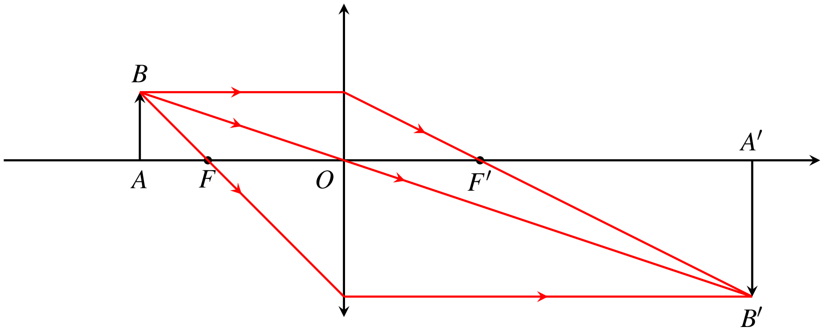
Construire l'image d'un objet transverse AB, tel que $\overline{OA} = -15\,\text{cm}$, par une lentille de distance focale $f' = 10\,\text{cm}$.

► **Nature de la lentille et de l'objet**

La lentille est convergente car $f' > 0$. L'objet est réel car il est situé avant la lentille ($\overline{OA} < 0$).

► Construction de l'image

On note que $\overline{OA} < -f'$ donc A est situé devant le foyer principal objet. Sur cet exemple on trace les trois rayons de constructions classiques (propriétés 1, 2 et 3), on vérifie que deux parmi les trois sont suffisants.



On observe que l'image est réelle, renversée ($\overline{A'B'}$ de signe opposé à $\overline{AB}$) et agrandie ($|\overline{A'B'}| > |\overline{AB}|$).

1.1.3 Cas d'un objet virtuel

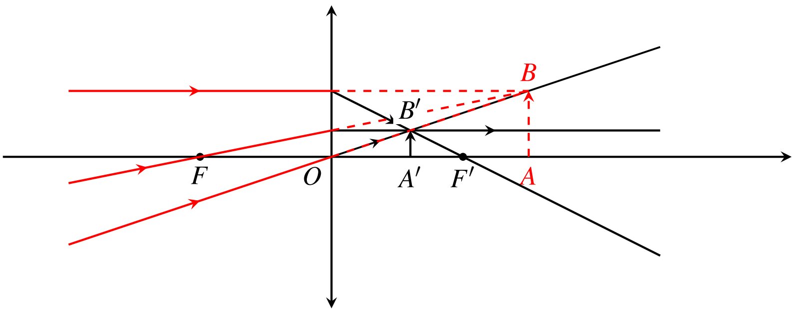
La méthode présentée au paragraphe précédent s'applique aussi bien aux objets réels que virtuels. On insiste toutefois sur ce dernier cas de figure car il pose souvent des problèmes de compréhension, notamment quant à la manière de représenter les rayons incidents. Voici quelques règles à respecter qui vous éviterons des erreurs de raisonnement.

Règle 1 : Un rayon incident doit obligatoirement se propager **dans le sens de l'axe optique**.

Règle 2 : Pour construire un point image il faut choisir au moins deux rayons incidents, qui se propagent obligatoirement **dans la direction du point objet**.

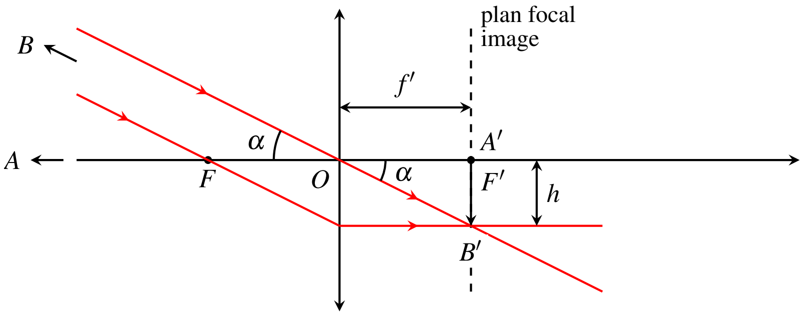
Règle 3 : Quand l'objet est virtuel le rayon incident est dévié par la lentille **avant de couper le point objet** (c'est son prolongement qui passe par le point objet).

On illustre ces règles avec la construction ci-après (lentille convergente et objet virtuel). On insiste par un choix de couleurs sur les rayons incidents, en montrant que leurs prolongements convergent bien vers le point objet B, tandis que les rayons émergents convergent en B'.



1.1.4 Cas d'un objet à l'infini

La méthode est sensiblement la même quand l'objet est à l'infini, on construit B' en traçant la marche de deux rayons incidents issus de B. On rappelle qu'un point objet à l'infini éclaire le système avec **un faisceau de rayons parallèles**. Si B est en dehors de l'axe optique alors aucun rayon issu de B ne se propage parallèlement à l'axe optique ; on ne peut pas utiliser la propriété 2. On construit donc l'image B' en utilisant les propriétés 1 et 3 (voir figure ci-dessous dans le cas d'une lentille convergente).



L'image d'un objet étendu à l'infini se situe **dans le plan focal image de la lentille**. La taille de l'image, dans les conditions de Gauss ($\alpha \ll 1\,\text{rad}$), vaut $\boxed{h = f'\tan\alpha \simeq f'\alpha}$, où α désigne la taille angulaire de l'objet à l'infini AB. Pour les applications numériques il faut exprimer α dans son unité SI, le **radian**.

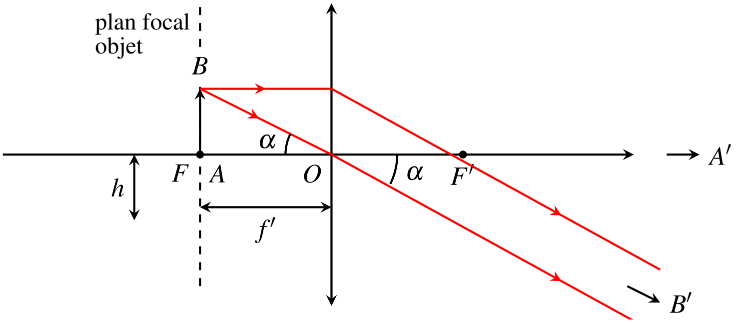
Cours

Le foyer principal image F' d'un système optique centré est défini comme le conjugué d'un point objet à l'infini sur l'axe optique : $\boxed{A_\infty \xleftrightarrow{(\mathscr{L})} F'}$. Cela justifie la propriété 2 évoquée au début de cette partie.

On appelle *foyer secondaire image* tout point de la lentille conjugué avec un point objet à l'infini hors de l'axe optique. Par aplanétisme les foyers secondaires images sont dans le plan focal image.

1.1.5 Cas d'un objet dans le plan focal objet

La même méthode d'applique encore.



L'image d'un objet étendu dans le plan focal objet d'une lentille est **renvoyée à l'infini**. La taille angulaire de l'image, dans les conditions de Gauss ($\alpha \ll 1\,\text{rad}$), vérifie $\boxed{h = f'\tan\alpha \simeq f'\alpha}$, où h est la taille de l'objet lumineux AB.

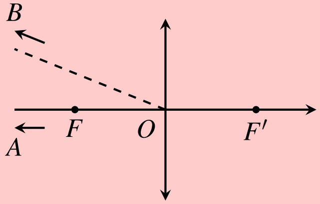
Cours

Le foyer principal objet F d'un système optique centré est défini comme le conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe optique : $\boxed{F \overset{(\mathscr{L})}{\longleftrightarrow} A'_\infty}$. Cela justifie la propriété 3 évoquée au début de cette partie.
On appelle foyer secondaire objet tout point de la lentille conjugué avec un point image à l'infini hors de l'axe optique. Par aplanétisme les foyers secondaires objets sont dans le plan focal objet.

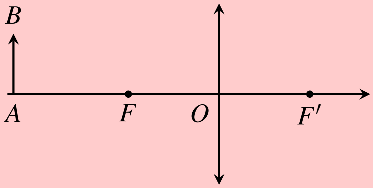
Application 1

Entraînez-vous à construire une image dans tous les cas possible. À chaque fois déterminez les propriétés de l'image (réelle, virtuelle ou à l'infini, agrandie ou rétrécie, droite ou renversée).

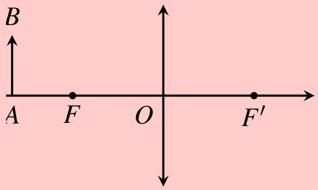
LENTILLE CONVERGENTE



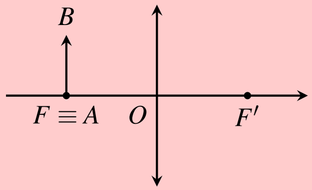
$\overline{OA} = -\infty$



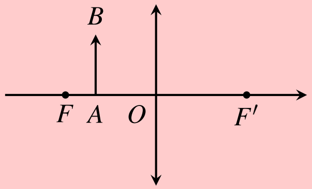
$-\infty < \overline{OA} < -2f'$



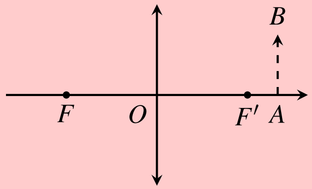
$-2f' < \overline{OA} < -f'$



$\overline{OA} = -f'$

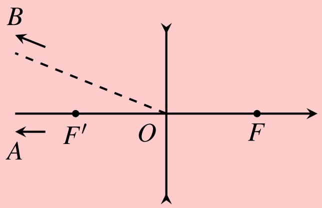


$-f' < \overline{OA} < 0$

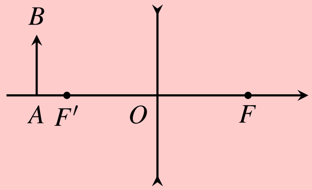


$\overline{OA} > 0$

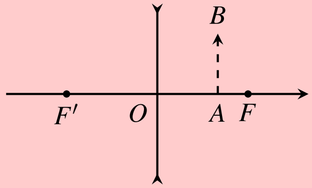
LENTILLE DIVERGENTE



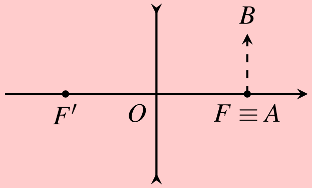
$\overline{OA} = -\infty$



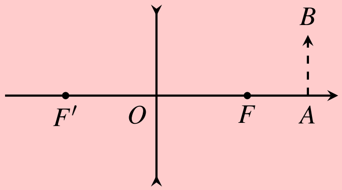
$-\infty < \overline{OA} < 0$



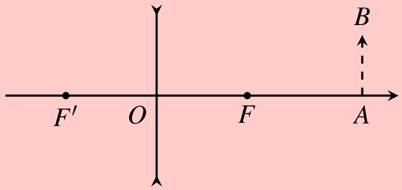
$0 < \overline{OA} < -f'$



$\overline{OA} = -f'$



$-f' < \overline{OA} < -2f'$



$-2f' < \overline{OA} < \infty$

1.2 Relations de conjugaison et de grandissement

1.2.1 Position et taille d'une image

Cours

Le grandissement d'une lentille pour un objet transverse AB à distance finie, d'image $A'B'$, est défini par $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}}$.

- Si $\gamma > 0$ l'image est droite et si $\gamma < 0$ l'image est renversée.
- Si $|\gamma| > 1$ l'image est agrandie et si $|\gamma| < 1$ l'image est rétrécie.

On énonce ci-dessous les relations de conjugaison et de grandissement des lentilles minces. Elles seront toujours rappelées dans un sujet écrit ou oral.

- Relation de conjugaison de DESCARTES : $\boxed{\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}}$.
- Relation de conjugaison de NEWTON : $\boxed{\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2}$.
- Relations de grandissement : $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{f'}{\overline{FA}} = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}}$.

Les deux relations de conjugaison sont équivalentes. On utilise l'une ou l'autre suivant les cas, pour des raisons pratiques de simplicité des calculs, généralement en fonction des données de l'énoncé. Même chose pour les différentes relations de grandissement.

Exemple

Déterminer par le calcul la position et la taille de l'image d'un objet transverse AB, tel que $\overline{OA} = -10\,\text{cm}$ et $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$, par une lentille de distance focale $f' = 15\,\text{cm}$. Vérifier les résultats avec une construction géométrique.

► **Position de l'image**

L'énoncé fournie la valeur de $\overline{OA}$ donc on choisit d'utiliser la relation de conjugaison de Descartes.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} \iff \boxed{\overline{OA'} = \frac{f'\,\overline{OA}}{f' + \overline{OA}} = -30\,\text{cm}}$$

L'image est virtuelle car elle se forme devant la lentille ($\overline{OA'} < 0$).

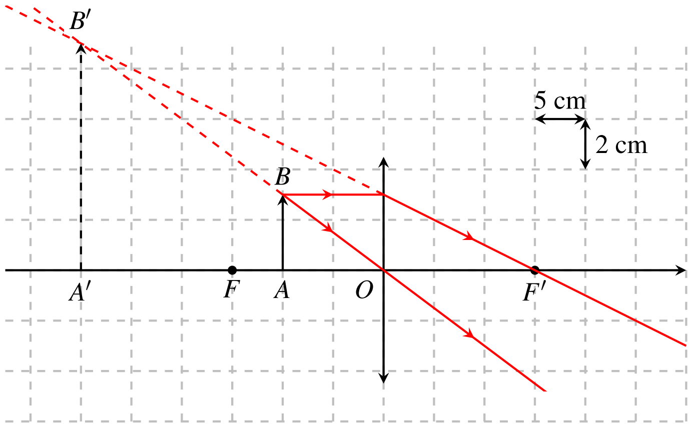
► **Taille de l'image**

On connaît $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ donc on utilise la relation de grandissement suivante :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \iff \boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\overline{AB} = 9\,\text{cm}}$$

L'image est droite et agrandie ($\gamma > 1$).

► **Vérification avec une construction géométrique**



Le tracé est cohérent avec les calculs précédents.

Application 2

Déterminer par le calcul la position et la taille de l'image d'un objet transverse AB, tel que $\overline{FA} = -25\,\text{cm}$ et $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, par une lentille de distance focale $f' = -15\,\text{cm}$. Vérifier les résultats avec une construction géométrique.

1.2.2 Calculs analytiques avec les relations de conjugaison/grandissement

Dans les exercices les plus classiques il s'agit rarement de calculer simplement la position et la taille d'une image. Les relations de conjugaison et/ou de grandissement sont un point de départ pour discuter de la possibilité de former une image ayant certaines propriétés souhaitées et des conditions dans lesquelles il faut se placer. Par exemple :

- On veut projeter l'image d'une diapositive sur un écran. La position de l'écran et la distance focale sont fixées. Comment placer l'objet et la lentille pour obtenir sur l'écran une image agrandie vingt fois ? L'image est-elle droite ou renversée ?
- On prend en photo un monument. La taille du capteur étant fixée, à quelle distance minimale faut-il se trouver du monument pour le voir en entier sur la photo ?
- La distance entre un objet et un écran est fixée. Est-il possible de former l'image de l'objet sur l'écran avec une lentille ? À quelle(s) condition(s) ?

La marche à suivre variera d'un exercice à l'autre mais on peut dégager certaines lignes directrices.

En résumé

• Quelles sont les critères à remplir : obtenir un certain grandissement ? former l'image à un endroit bien précis ? Obtenir une image réelle, ou au contraire virtuelle ? En déduire quelle quantité il faut calculer. Cela aidera à déterminer laquelle des relation de conjugaison et/ou de grandissement sera la plus appropriée.

• Quelles sont les données/contraintes : distance focale ? position de l'objet ? distance objet-image ?

• Déterminer quels sont les deux points de l'axe optique qui doivent être conjugués l'un avec l'autre et l'écrire explicitement (par exemple $A \overset{(\mathscr{L})}{\longleftrightarrow} A'$). Ensuite, écrire selon la réponse attendue une relation de conjugaison ou de grandissement. Mener les calculs jusqu'à obtenir la valeur de la quantité recherchée, puis conclure.

Exemple

1. Où doit-on placer un objet réel par rapport à une lentille convergente pour obtenir une image réelle ? L'image est-t-elle droite ou renversée ? À quelle condition est-elle agrandie ?

2. Démontrer que lorsqu'une lentille convergente de distance focale f' forme l'image réelle d'un objet réel, la distance objet-image est au moins égale à $4f'$.

► **Mise en œuvre d'une relation de conjugaison**

1. On cherche une condition sur la distance $\overline{OA}$ pour que l'image formée soit réelle, c'est-à-dire telle que $\overline{OA'} > 0$. La lentille est convergente donc $f' > 0$. Pour plus de simplicité on note $x = \overline{OA}$ la variable et on étudie le signe de $\overline{OA'}$ en fonction de x. Ici le plus simple est d'utiliser la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \iff \overline{OA'} = \frac{xf'}{x+f'}$$

Il est dit que l'objet est réel donc on étudie uniquement le cas $x < 0$. Le numérateur est négatif donc $\overline{OA'} > 0$ à condition que le dénominateur soit négatif aussi. On conclut qu'une lentille convergente forme l'image réelle d'un objet réel à condition que $\boxed{x < -f'}$, c'est-à-dire que l'objet doit être situé **avant le foyer principal objet** (voir schéma du paragraphe 1.1.2).

► **Mise en œuvre d'une relation de grandissement**

On exprime le grandissement de la lentille : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{f'}{x+f'}$. D'après le résultat de la question précédente $\gamma < 0$ donc l'image est **renversée**. Si l'image est renversée et agrandie alors :

$$\gamma < -1 \iff \frac{1}{x+f'} < -\frac{1}{f'} \iff x+f' > -f' \iff x > -2f'$$

On conclut que l'image est réelle, renversée et agrandie à condition que $\boxed{-2f' < x < -f'}$ (voir application 1).

2. On se place dans le cas $x < -f'$ (voir question précédente). On étudie cette fois-ci les variations de la distance $D = \overline{AA'}$ avec x, qu'on calcule en utilisant le résultat de la question précédente et une relation de Chasles :

$$D = \overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \frac{xf'}{x+f'} - x = -\frac{x^2}{x+f'}$$

On dresse le tableau de variations de la fonction $D(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, -f'[$. On calcule la dérivée : $D'(x) = -\dfrac{x(x+2f')}{(x+f')^2}$.

x	$-\infty$		$-2f'$		$-f'$
$D'(x)$		$-$	0	$+$	
D		$\searrow$	$4f'$	$\nearrow$	

La distance objet-écran est minimale pour $x = -2f'$ et vaut $\boxed{D_{\min} = 4f'}$.

> Quand on veut projeter l'image d'un objet réel sur un écran avec une lentille convergente il faut prévoir un espace au moins égal à $4f'$ entre l'objet et l'écran. Ce critère impose un encombrement minimum pour ce type de montages optiques, ce qui peut avoir son importance en TP où l'on est généralement limité par l'espace de la paillasse.

Application 3

Un rétroprojecteur, assimilé à une lentille de distance focale $f' = 30\,\text{cm}$, est utilisé pour projeter sur un écran l'image d'un document en taille A4 ($21 \times 29,7\,\text{cm}$).

1. On souhaite que l'image soit cinq fois plus grande que l'objet. La position de l'écran étant fixée, où faut-il placer la lentille et l'objet ?

2. En pratique l'écran ne peut pas être distant de plus de $1,5\,\text{m}$ de la lentille. Déterminer les dimensions maximales du document sur l'écran.

1.3 Œil

1.3.1 Modèle optique

L'œil humain est un instrument complexe et très performant dont le principe consiste à convertir l'énergie lumineuse incidente dans le domaine du visible ($400\,\text{nm} \leq \lambda \leq 750\,\text{nm}$), en signaux électriques transmis par le nerf optique et interprétés en tant qu'images par le cerveau. On s'intéresse en particulier aux éléments suivants (voir schéma ci-après) :

- la rétine : paroi tapissée de cellules photoréceptrices (cônes et bâtonnets) qui convertissent l'énergie lumineuse et signaux électriques ;
- le cristallin : milieu transparent et déformable, semblable à une lentille biconvexe, destinée à faire converger les ondes lumineuses incidentes dans le plan de la rétine.
- la pupille : ouverture de diamètre variable, semblable à un diaphragme, permettant à la lumière incidente de poursuivre sa marche à l'intérieur de l'œil.

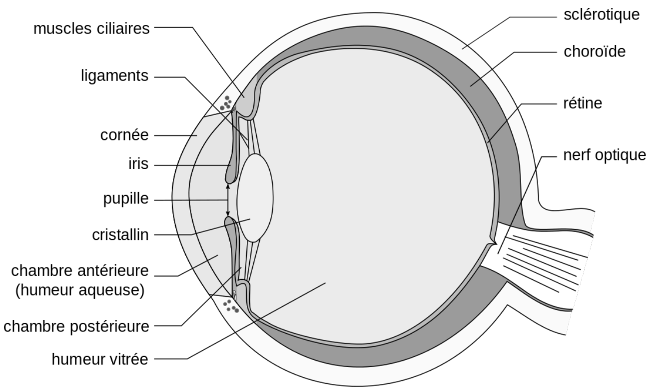


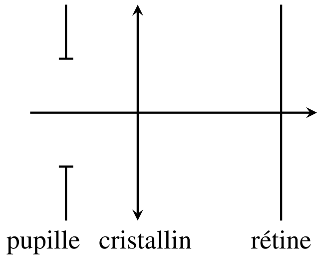
Schéma d'un œil humain (Source : *commons.wikimedia.org*)

D'un point de vue optique certaines propriétés de l'œil peut être interprétées avec les lois de l'optique géométrique, dans l'approximation paraxiale. Nous utilisons un modèle très simplifié pour rendre compte de ces propriétés, dans lequel l'œil est un système centré.

• un diaphragme de diamètre variable (pupille) ;

• une lentille mince convergente (cristallin) ;

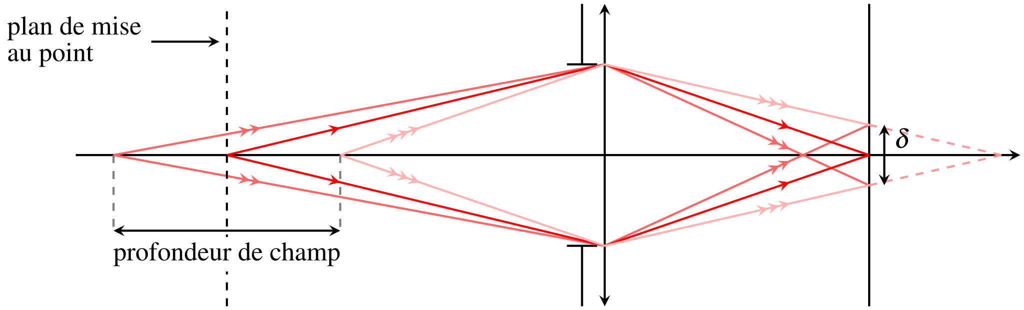
• un plan transverse à l'axe optique (rétine) situé à une distance **fixe** du cristallin, d'environ 16 mm.



Œil réduit

1.3.2 Mise au point, profondeur de champ

De manière générale on appelle *plan de mise au point* d'un système centré (S) le plan transverse dont (S) forme une image nette, c'est-à-dire le plan transverse conjugué par (S) avec le plan d'observation/enregistrement (rétine, écran, capteur numérique). **Seuls les objets situés dans ce plan sont certains d'être vus nets sur l'image**.



Plan de mise au point et profondeur de champ d'une lentille
Les cellules élémentaires du capteur sont de taille δ

Cela dit, un objet lumineux situé à proximité du plan de mise au point peut quand même être vu net si l'écart au stigmatisme est indétectable par le capteur (tâches images plus petites que la dimension du capteur). On appelle *profondeur de champ* la largeur (le long de l'axe optique) de la zone de netteté.

1.3.3 Accommodation

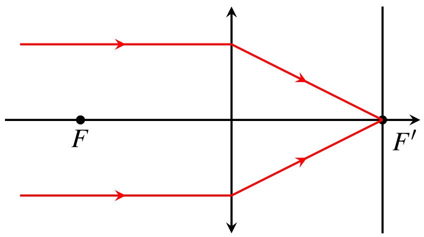
L'œil a la capacité de modifier la distance de mise au point pour observer des objets proches comme éloignés, c'est le processus **d'accommodation**. D'un point de vue optique cette adaptation s'effectue par une **modification de la distance focale du cristallin**. Physiologiquement l'accommodation s'opère par l'action des muscles ciliaires qui modifient la tension des ligaments entourant le cristallin. Ces actions mécaniques déforment légèrement le cristallin, elles modifient notamment son rayon de courbure, donc sa distance focale.

> • La distance de mise au point est maximale pour l'œil au repos (sans accommodation). On appelle **punctum remotum** (ou PR) le point de l'axe optique sur lequel l'œil fait la mise au point au repos.
>
> • Plus l'accommodation est intense et plus la distance focale du cristallin est faible, donc plus le plan de mise au point se rapproche de l'œil.
>
> • L'accommodation est limitée, c'est-à-dire que l'œil n'est plus capable de faire la mise au point pour un objet trop proche. On appelle **punctum proximum** (ou PP) le point de l'axe optique sur lequel l'œil fait la mise au point dans son état d'accommodation maximale.
>
> • Une accommodation intense entraîne un inconfort voir des douleurs si elle se prolonge dans le temps. **La vision est la plus confortable lorsque l'œil est au repos**, autrement dit quand il regarde à grande distance.

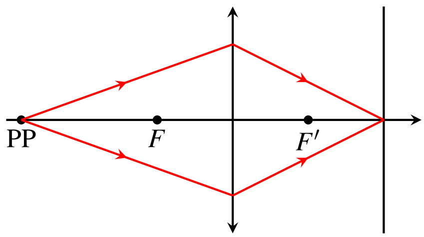
1.3.4 Œil emmétrope

Un œil standard sans défaut de vision est appelé emmétrope.

> • Le PR est situé **à l'infini**. Cela signifie que le plan de la rétine est confondu avec le plan focal image du cristallin.
>
> • Le PP est typiquement situé à environ 25 cm (varie avec l'âge).
>
> Pour un œil emmétrope (ou un œil corrigé) **la vision est la plus confortable (sans accommodation) à l'infini**.



Œil emmétrope au repos



Œil emmétrope dans l'état d'accommodation maximale

1.3.5 Pouvoir séparateur

L'œil a une faculté limitée à distinguer des objets de petite taille angulaire. On appelle *pouvoir séparateur* la taille angulaire minimale d'un objet visible à l'œil nu.

> L'œil humain a un pouvoir séparateur de l'ordre **d'une minute d'arc**, c'est-à-dire un soixantième de degré ($1' = \frac{1}{60}° = 3 \cdot 10^{-4}$ rad).

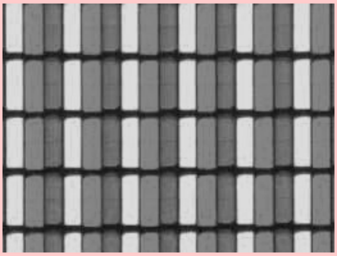
En résumé

Certains systèmes optiques sont destinés à amplifier les capacités de l'œil à voir les détails d'un objet (loupe, jumelles, microscope, lunette astronomique). Leur principe est de former une image de taille angulaire plus élevée que celle de l'objet vu à l'œil nu. Ces systèmes sont utilisés en complément de l'œil, qui vient se placer derrière la dernière lentille appelée *oculaire*.

Pour éviter l'accommodation et rendre l'observation la plus confortable possible le système doit être réglé de sorte que **l'oculaire renvoie une image à l'infini**.

Application 4

Un écran LCD est constitué de pixels carrés de dimensions $155 \times 155\,\mu$m, séparés en trois unités de couleur bleu, rouge et vert. Chaque unité est de dimensions $50 \times 140\,\mu$m.



Pixels d'un écran LCD

1. Déterminer la taille angulaire α d'un pixel entier vu à 80 cm de distance. Peut-on distinguer les pixels à l'œil nu ?

On utilise une loupe assimilée à une lentille de distance focale $f' = 5\,$cm.

2. Comment faut-il placer la loupe par rapport à l'écran LCD pour une observation confortable par un œil emmétrope ? La position de l'œil a-t-elle une importance ?

3. Illustrer schématiquement en construisant l'image d'un objet transverse AB par la loupe. Exprimer la taille angulaire α' de l'image en fonction de la taille $h = AB$ de l'objet et de f'.

4. Peut-on distinguer les cellules individuelles à travers la loupe ?

5. On appelle grossissement commercial d'une loupe le rapport $G = \alpha'/\alpha_{\text{ref}}$ avec α_{ref} la taille angulaire d'un objet vu à l'œil nu à la distance de référence $d_m = 25\,$cm et α' la taille angulaire de ce même objet vu à travers la loupe.
Justifier le choix de la distance de référence et déterminer numériquement G pour cette loupe.

2 Système à deux lentilles

2.1 Lentilles non accolées

2.1.1 Construction géométrique

Nous avons vu que lorsque la lumière traverse plusieurs systèmes optiques successifs l'image par un système joue le rôle d'objet pour le suivant. Dans le cas d'un système à deux lentilles on peut le résumer ainsi : $\boxed{A \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_1)} A' \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_2)} A''}$, où A' est à la fois le conjugué de A par $(\mathscr{L}_1)$ et le conjugué de A'' par $(\mathscr{L}_2)$.

On peut également écrire que A et A'' sont conjugués par le système des deux lentilles : $\boxed{A \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_1)+(\mathscr{L}_2)} A''}$. La méthode pour construire l'image d'un objet transverse par un système de deux lentilles est semblable à celle d'une lentille unique.

En résumé

• Tracer la marche de deux rayons bien choisis issus de B (en dehors de l'axe optique), à travers la première lentille puis la seconde.

• L'image intermédiaire B' est à l'intersection des deux rayons émergeant de $(\mathscr{L}_1)$, l'image finale B'' à l'intersection des deux rayons émergeant de $(\mathscr{L}_2)$.

• L'image A'' (resp. A') est le projeté orthogonal de B'' (resp. B') sur l'axe optique (en raison de l'aplanétisme dans les conditions de Gauss).

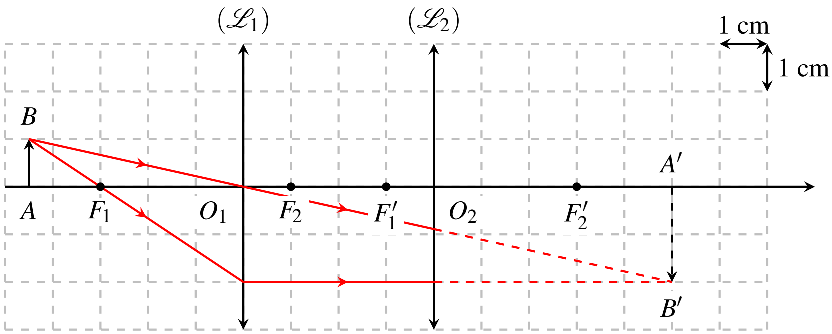
Exemple

Construire l'image d'un objet transverse AB dans les conditions suivantes :

$$\overline{F_1A} = -1{,}5\,\text{cm} \;;\; \overline{AB} = 1\,\text{cm} \;;\; f_1' = f_2' = 3\,\text{cm} \;;\; \overline{O_1O_2} = 4\,\text{cm}$$

► **Image par la première lentille**

On place correctement sur l'axe optique les lentilles, leurs foyers ainsi que l'objet, puis on trace la marche de deux rayons issus de B à travers la première lentille.

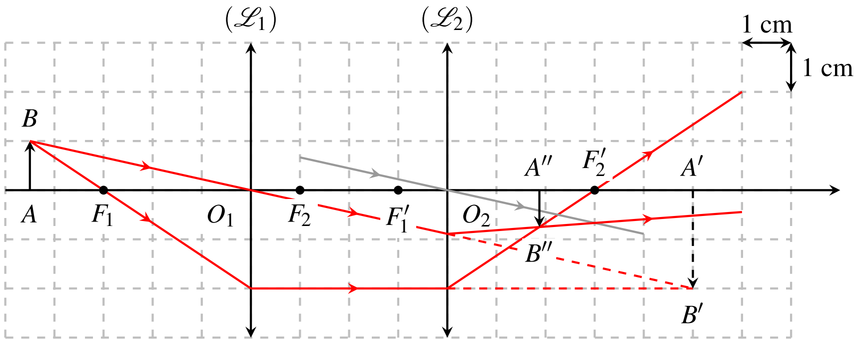


Attention : On arrête les rayons au niveau de la lentille $(\mathscr{L}_2)$ car ils sont déviés par cette lentille ! On montre par un prolongement la position de l'image $A'B'$ de AB par $(\mathscr{L}_1)$. $A'B'$ joue le rôle d'un objet virtuel pour la lentille $(\mathscr{L}_2)$.

Il est avantageux de choisir l'un des deux rayons passant par le foyer principal objet F_1 car c'est à la fois un rayon simple à tracer derrière $(\mathscr{L}_1)$ (propriété 3) mais aussi derrière $(\mathscr{L}_2)$ (propriété 2) !

► **Image par la deuxième lentille**

On utilise la propriété 2 pour le rayon qui arrive sur $(\mathscr{L}_2)$ parallèlement à l'axe optique.
Pour tracer la marche du deuxième rayon on utilise la **propriété 4**. On se sert pour cela d'un rayon de construction passant par le centre optique O_2, qu'on représente dans une autre couleur pour le distinguer des deux rayons issus de B.



L'image $A''B''$ est réelle, renversée et rétrécie.

2.1.2 Relation de conjugaison et de grandissement

> Le grandissement d'un système de deux lentilles est égal au produit des grandissements de chaque lentille :
> $$\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Longleftrightarrow \boxed{\gamma = \gamma_1 \gamma_2}$$

En résumé

• Appliquer successivement deux relations de conjugaison pour déterminer la position de A', puis A''.

• Appliquer successivement deux relations de grandissement pour déterminer $\overline{A'B'}$ puis $\overline{A''B''}$.

⚠ Pour chaque relation de conjugaison il faut utiliser les notations appropriées : O_1, F_1, F'_1, f'_1 pour la lentille $(\mathscr{L}_1)$ et O_2, F_2, F'_2, f'_2 pour la lentille $(\mathscr{L}_2)$. Il faut également vérifier que vous utilisez le bon objet et la bonne image.

Pour être certain de ne pas faire d'erreur il est bon d'écrire sous forme symbolique, avant tout calcul, les points conjugués les uns avec les autres ($A \overset{(\mathscr{L}_1)}{\longleftrightarrow} A' \overset{(\mathscr{L}_2)}{\longleftrightarrow} A''$ par exemple), puis de préciser à chaque fois le nom de la lentille avant d'écrire votre relation de conjugaison ou de grandissement (*"j'écris la relation de conjugaison de Descartes pour* $(\mathscr{L}_1)$ *:* $\dfrac{1}{\overline{O_1A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$*)."*

Exemple

On reprend les valeurs numériques de l'exemple précédent. Calculer la position et la taille de l'image $A''B''$ par le système des deux lentilles.

► **Position et taille de l'image intermédiaire**

On écrit la relation de conjugaison de Newton pour $(\mathscr{L}_1)$:

$$\overline{F_1A} \times \overline{F_1'A'} = -f_1'^2 \iff \boxed{\overline{F_1'A'} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1A}} = 6\,\text{cm}}$$

On écrit une relation de grandissement pour $(\mathscr{L}_1)$:

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f_1'}{\overline{F_1A}} \iff \boxed{\overline{A'B'} = \frac{f_1'}{\overline{F_1A}}\overline{AB} = -2\,\text{cm}}$$

► **Position et taille de l'image finale**

On écrit la relation de conjugaison de Newton pour $(\mathscr{L}_2)$:

$$\overline{F_2A'} \times \overline{F_2'A''} = -f_2'^2 \iff \overline{F_2'A''} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2A'}}$$

On détermine le dénominateur avec une relation de Chasles :

$$\overline{F_2A'} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'A'} = \overline{F_1'A'} + f_1' + f_2' - \overline{O_1O_2} = 8\,\text{cm}$$

On conclut que $\boxed{\overline{F_2'A''} = -1,125\,\text{cm}}$.

On écrit une relation de grandissement pour $(\mathscr{L}_2)$:

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{f_2'}{\overline{F_2A'}} \iff \boxed{\overline{A''B''} = \frac{f_2'}{\overline{F_2A'}}\overline{A'B'} = -0,75\,\text{cm}}$$

On vérifie que ces résultats sont cohérents avec la construction tracée au paragraphe précédent.

Application 5

Un téléobjectif d'appareil photographique est constitué d'une lentille convergente $(\mathscr{L}_1)$ de distance focale $f_1' = 100\,\text{mm}$ et d'une lentille divergente $(\mathscr{L}_2)$ de distance focale $f_2' = -50\,\text{mm}$. L'intervalle entre les deux lentilles vaut $e = 70\,\text{mm}$.

1. Construire l'image par le téléobjectif d'un objet étendu à l'infini.

2. Déterminer par le calcul la position de l'image, c'est-à-dire l'endroit où il faut placer le capteur. En déduire numériquement l'encombrement du téléobjectif, défini comme la distance entre la lentille frontale $(\mathscr{L}_1)$ et le capteur.

3. Exprimer la taille h de l'image en fonction de f_1', f_2', e et la taille angulaire α de l'objet.

4. On définit la distance focale équivalente f' du téléobjectif par la relation $h = f'\alpha$. Déterminer littéralement et numériquement f'.
Quel avantage présente le téléobjectif par rapport à une lentille unique de distance focale f' ?

2.2 Lentilles accolées

Cours

Deux lentilles minces sont accolées si l'on peut supposer que leurs centres optiques sont confondus.
D'un point de vue optique deux lentilles minces accolées de vergences V_1 et V_2 se comportement exactement comme une lentille unique de vergence équivalente $V_{\text{eq}} = V_1 + V_2$.

La démonstration repose sur un argument simple : deux systèmes optiques sont équivalents s'ils ont **la même relation de conjugaison**.

En résumé

• Écrire la relation de conjugaison de Descartes pour chaque lentille, en tenant compte du fait que les deux centres optiques sont confondus.

• Additionner les deux relations précédentes et justifier que l'on obtient une équation semblable à la relation de conjugaison de Descartes d'une lentille unique de vergence $V_1 + V_2$.

On introduit les notations utiles : un point objet A sur l'axe optique est conjugué avec A' par la première lentille et A'' par l'ensemble des deux lentilles : $A \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_1)} A' \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_2)} A''$. On cherche la relation de conjugaison du doublet $(\mathscr{L}_1) + (\mathscr{L}_2)$, c'est-à-dire entre A et A'' : $A \xleftrightarrow{(\mathscr{L}_1)+(\mathscr{L}_2)} A''$. On note O le centre optique commun aux deux lentilles.

On écrit la relation de conjugaison de Descartes pour $(\mathscr{L}_1)$ puis pour $(\mathscr{L}_2)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'_1} & (1) \\ \dfrac{1}{\overline{OA''}} - \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{f'_2} & (2) \end{cases}$$

En additionnant les relations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Cette équation est semblable à la relation de conjugaison de Descartes d'une lentille de dont la distance focale f'_{eq} vérifie :

$$\frac{1}{f'_{\text{eq}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \iff \boxed{V_{\text{eq}} = V_1 + V_2}$$

Un doublet de lentilles accolées est équivalent d'un point de vue optique à une lentille unique de vergence V_{eq}.

Application 6

La myopie est aussi appelée “syndrome de l'œil long”. La distance d entre le cristallin et la rétine est supérieure à celle d'un œil emmétrope. On prendra ici $d = 16,8\,\text{mm}$ tandis que la distance focale du cristallin au repos vaut $f'_r = 16,0\,\text{mm}$.

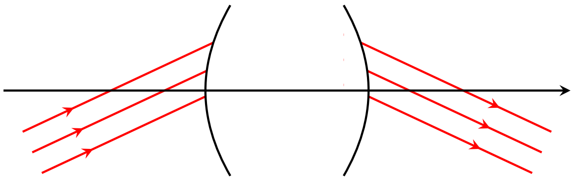
1. Déterminer la position du PR de cet œil. Quel conséquence cela a-t-il sur la vision de loin (c'est-à-dire à l'infini) ? Quel type de verre peut corriger la myopie ?

2. Calculer la vergence V_ℓ d'un verre de lunette, modélisé pour simplifier par une lentille mince accolée au cristallin, qui permet de corriger la vision de loin.

2.3 Système afocal

Cours

Un système optique est dit *afocal* lorsque **ses foyers principaux sont situés à l'infini**. Autrement dit il renvoie à l'infini l'image d'un objet à l'infini. Cela permet à une personne regardant à travers le système d'observer sans accommodation l'image d'objets à l'infini. Cette propriété est notamment utilisée dans certains instruments destinés à l'observation astronomique.



2.3.1 Condition d'afocalité d'un système de deux lentilles

Cours

Un système de deux lentilles est afocal à condition que la distance entre les centres optiques vérifie $\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$.

Cette relation est valable quelque soit la nature des lentilles utilisées (convergente et/ou divergente).

Voici la méthode qui permet de le justifier. On utilise la notation suivante : $A \overset{(\mathscr{L}_1)}{\longleftrightarrow} A' \overset{(\mathscr{L}_2)}{\longleftrightarrow} A''$ et l'on cherche à quelle condition, A étant à l'infini, on a également A'' à l'infini. Penchons nous sur la position de l'image intermédiaire :

- l'objet A étant à l'infini sur l'axe optique, A' est confondu avec le foyer principal image de $(\mathscr{L}_1)$: $A' \equiv F_1'$;
- l'image finale A'' étant à l'infini sur l'axe optique, A' est confondu avec le foyer principal objet de $(\mathscr{L}_2)$: $A' \equiv F_2$.

On conclut qu'un système de deux lentilles est afocal à condition que F_1' **et** F_2 **soient confondus**. Pour y parvenir il suffit de placer les deux lentilles à une certaine distance l'une de l'autre :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} \iff \boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$$

2.3.2 Grossissement d'un système afocal

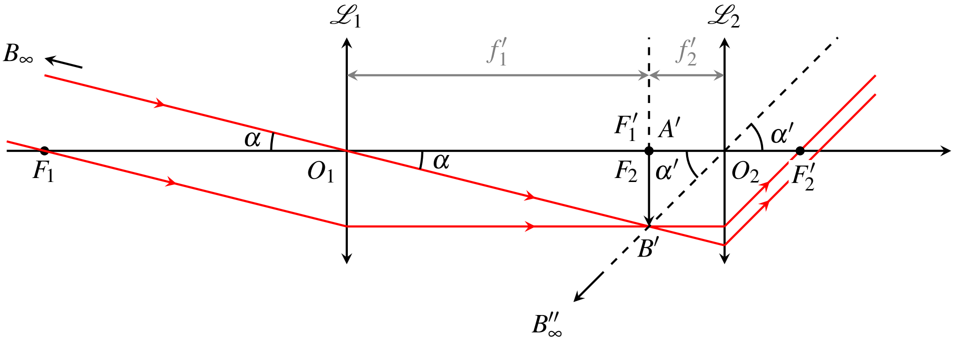
Cours

Le grossissement d'un système afocal est défini par $\boxed{G = \alpha'/\alpha}$ où α est la taille angulaire de l'objet vu à l'œil nu et α' celle de l'image vu à travers le système afocal (angles non orientés).
Pour un système de deux lentilles le grossissement vaut $\boxed{G = f_1'/f_2'}$.

On illustre le calcul du grossissement sur l'exemple de la **lunette astronomique**, constituée :

- d'une lentille convergente de distance focale f_1' appelée *l'objectif* ;
- d'une lentille convergente de distance focale f_2' appelée *l'oculaire*.

On construit sur la figure ci-après l'image par la lunette d'un objet étendu à l'infini de taille angulaire α. On note $A'B'$ l'image intermédiaire formée dans le plan focal image de $(\mathscr{L}_1)$ / plan focal objet de $(\mathscr{L}_2)$.



On rappelle qu'on travaille dans les conditions de Gauss. Dans les triangles rectangles $O_1A'B'$ et $O_2A'B'$:

$$\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{A'B'}{f'_1} \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha' \simeq \alpha' = \frac{A'B'}{f'_2}$$

On conclut que :

$$A'B' = \alpha f'_1 = \alpha' f'_2 \iff \boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_2}}$$

> Une lunette astronomique sert à grossir, c'est-à-dire à former une image de plus grande taille angulaire que l'objet vu à l'œil nu. Elle est donc réglée de sorte que $G > 1$, c'est-à-dire $f'_1 > f'_2$.
>
> Typiquement le grossissement d'une lunette de bonne qualité est de l'ordre de quelques dizaines ($f'_1 \sim 1\,\text{m}$ et $f'_2 \sim \text{qq cm}$).
>
> Il est à noter que la lunette astronomique renvoie une image **renversée** (l'image B''_∞ est située de l'autre côté de l'axe optique par rapport à l'objet B_∞).

Application 7

Une lunette de Galilée est constituée d'une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 700\,\text{mm}$ et une lentille divergente de distance focale $f'_2 = -25\,\text{mm}$.

1. Déterminer la distance entre les deux lentilles pour que la lunette soit afocale.

2. Construire l'image d'un objet étendu à l'infini par la lunette. Quelle différence y a-t-il avec la lunette astronomique ?

3. Calculer la taille minimale d'un cratère lunaire pour qu'il soit visible avec cette lunette.
Donnée : distance Terre-Lune : $D = 3,8 \cdot 10^5\,\text{km}$.