Chapitre 4

FONCTIONS USUELLES

I Généralités sur les fonctions

Dans tout le paragraphe, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, que l'on supposera toujours non vides et non réduits à un point.

1 Ensemble de définition

Dans ce chapitre, on définit intuitivement une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles f comme un procédé permettant s'associer à un réel x un autre réel $f(x)$. Une définition plus formelle sera donnée au chapitre 6.

Définition 1 *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.* **L'ensemble de définition** *(ou* **domaine de définition***) de f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini. On le note D_f.*

Exemples : L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$. Celui de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$. Celui de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

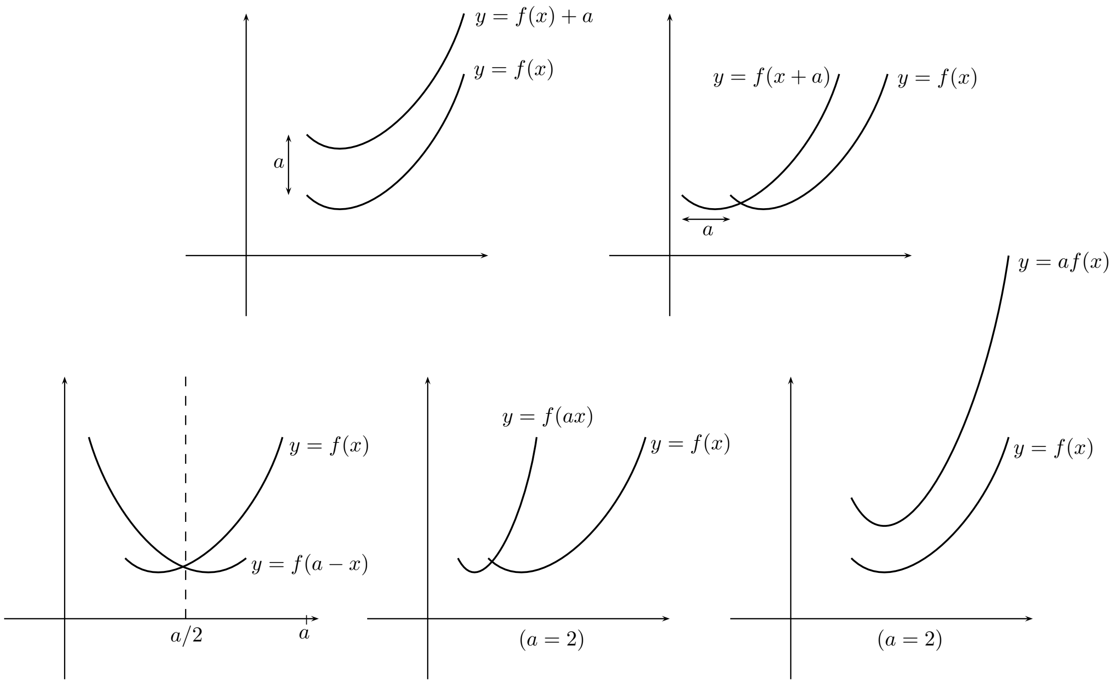
Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x - 7}$.

Remarque : Quand on écrit "Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction", on suppose toujours que I est inclus dans l'ensemble de définition de f. On note $\mathbb{R}^I$ ou $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2 Représentation graphique

Définition 2 *La* **courbe représentative** *d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt I.*

À partir de la courbe de f, il faut savoir tracer les courbes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$, où a est un réel.



3 Opérations et relation d'ordre

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit α un réel.

Addition : la fonction $f+g$ est définie sur I par :

$$\forall\, x \in I,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Multiplication : la fonction $f\times g$ est définie sur I par :

$$\forall\, x \in I,\ (f\times g)(x) = f(x)\times g(x).$$

Multiplication par un réel : la fonction αf est définie sur I par :

$$\forall\, x \in I,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Relation d'ordre : on note $f \leqslant g$ si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$.

L'addition est associative, commutative, admet pour élément neutre la fonction nulle, et toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un opposé $-f : x \mapsto -f(x)$.

La multiplication est associative, commutative, admet pour élément neutre la fonction constante égale à 1, et une fonction f est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas sur I (son inverse est alors $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$). La multiplication est distributive par rapport à l'addition, mais elle n'est pas intègre.

4 Composée de deux fonctions

Définition 3 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. La fonction* **composée de f et de g** *est la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall\, x \in I, (g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple : Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+x+1$ et $g(x) = 2x+1$.
Alors $(g\circ f)(x) = 2(x^2+x+1)+1 = 2x^2+2x+3$ et $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (2x+1)^2+(2x+1)+1 = 4x^2+6x+3$.

Remarque : En général $f\circ g \neq g\circ f$: la composition n'est pas commutative.

5 Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition 4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On dit que f est **majorée** *s'il existe un réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.*

On dit que f est **minorée** *s'il existe un réel m tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$.*

On dit que f est **bornée** *s'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$, i.e. si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque : m et M sont des *constantes* qui ne dépendent pas de x.

Proposition 1 *$f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$.*

Autrement dit, une fonction est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue.

Démonstration :

($\Leftarrow$) Supposons que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Alors on a $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$, donc f est bornée.

($\Rightarrow$) Supposons que f est minorée par a et majorée par b. Posons $M = \max(|a|, |b|)$. Alors $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. $\square$

Ainsi, pour justifier que la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, on peut dire que $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou que $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6 Monotonie d'une fonction

Définition 5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

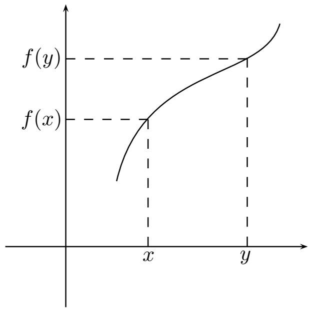
On dit que f est **croissante** *sur I si : $\forall\, x,y \in I,\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$.*

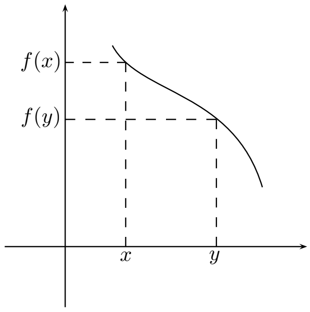
On dit que f est **décroissante** *sur I si : $\forall\, x,y \in I,\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y))$.*

On dit que f est **strictement croissante** *sur I si : $\forall\, x,y \in I,\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.*

On dit que f est **strictement décroissante** *sur I si : $\forall\, x,y \in I,\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.*

Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante le renverse. Une fonction **monotone** sur I est une fonction croissante sur I ou décroissante sur I.





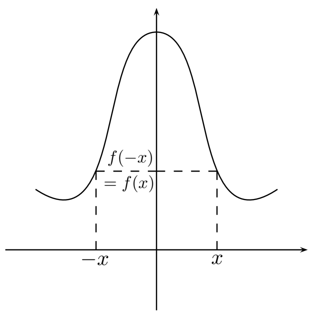
Remarque : Quand on parle de monotonie d'une fonction, il faut travailler sur des intervalles. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais par sur $\mathbb{R}^*$: on a $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$ par exemple.

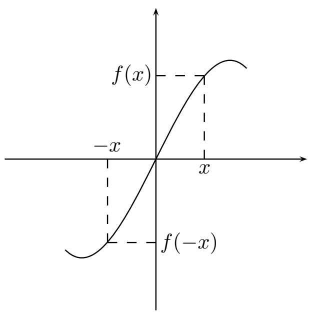
Exercice 2 Étudier (à partir de la définition) les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$.

7 Parité d'une fonction

Définition 6 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* **paire** *si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. On dit que f est* **impaire** *si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in A$.*

Interprétation graphique : Si f est paire, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si f est impaire, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.





Exemples :

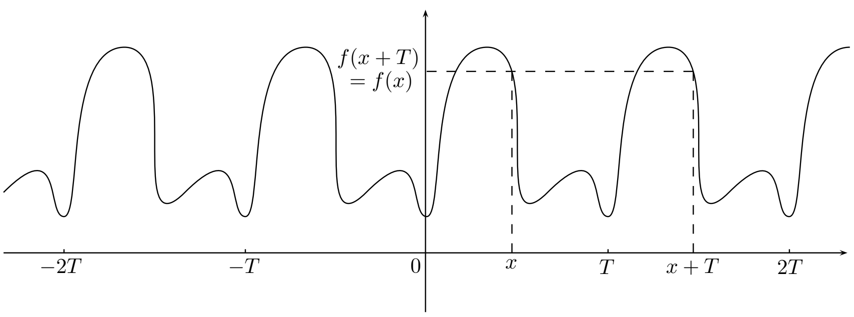
– Les fonctions $x \mapsto x^n$ (où n est un entier pair), $x \mapsto |x|$ et cos sont paires.

– Les fonctions $x \mapsto x^n$ (où n est un entier impair), sin et tan sont impaires.

8 Périodicité

Définition 7 *Soit $T > 0$ un réel. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que si $x \in A$ alors $x + T \in A$. On dit que f est T*-**périodique** *ou* **périodique de période** T *si $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in A$.*

Interprétation graphique : si f est T-périodique, alors sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.



Exemples :

– Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques car $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

– La fonction tangente est π-périodique car $\tan(x+\pi) = \tan x$ pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$.

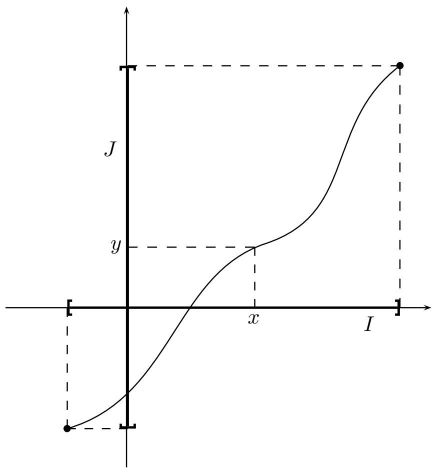
Exercice 3 Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ?

$$x \mapsto \sin 2x \ ; \ x \mapsto \sin \frac{x}{2} \ ; \ x \mapsto \sin(x^2) \ ; \ x \mapsto \sin^2 x \ ; \ x \mapsto \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{4} \ ; \ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

9 Bijection, fonction réciproque

Définition 8 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une* **bijection de I sur** *J (ou* **dans** *J) si tout élément de J admet un unique antécédent par f.*

Autrement dit : pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.



Exemples :

a) La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Tout $y \in [0, +\infty[$ a un unique antécédent ($\sqrt{y}$) par f.

b) La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas une bijection : tout $y > 0$ a deux antécédents par f ($\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$).

c) La fonction logarithme népérien $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection : tout $y \in \mathbb{R}$ a un unique antécédent (e^y) par ln.

d) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une bijection : les $y \leqslant 0$ n'ont pas d'antécédent par exp. En revanche $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une bijection. On dit que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définit une bijection* de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Définition 9 *Soit f une bijection de I dans J. Pour tout $y \in J$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. On définit ainsi une fonction $f^{-1} : J \to I$ appelée* **fonction réciproque de f**.

Pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in J$, on a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

De plus, on a $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$, et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in J$.

Exemples :

a) La réciproque de la fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est la fonction $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

b) La réciproque de la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

En pratique, pour déterminer $f^{-1}(y)$, on résout l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x.

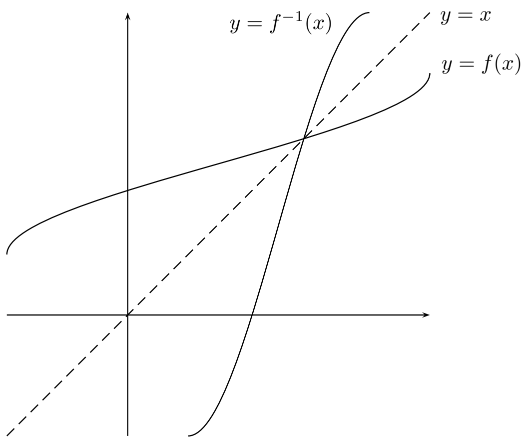
Théorème 2 *(Théorème de la bijection) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Si f est strictement monotone sur I, alors f définit une bijection de I dans $f(I)$, et f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Exercice 4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Montrer que f définit une bijection entre deux intervalles à préciser, puis déterminer f^{-1}.

Proposition 3 *Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Démonstration : Notons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ les courbes de f et f^{-1}. Alors : $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M'(y,x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. □



II Dérivation

Un chapitre ultérieur sera consacré à la dérivation. Dans ce paragraphe, on se contente de quelques rappels.

1 Dérivabilité

Définition 10 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. On dit que f est* **dérivable en** *a si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée* **dérivée de f en** *a (ou* **nombre dérivé de f en** *a) et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.*

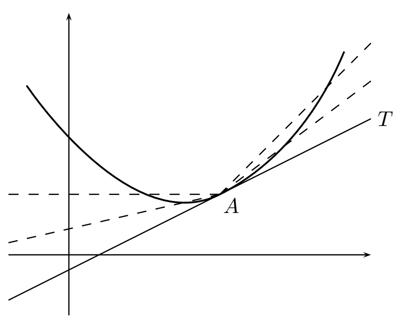
Le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé **taux d'accroissement de f entre a et x**.

Remarque : Si $a \neq 0$, on peut se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$. Ainsi, f est dérivable en a si et seulement si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Définition 11 *$f : I \to \mathbb{R}$ est* **dérivable sur** *I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors* **(fonction) dérivée de** *f l'application notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$ qui, à tout x de I, associe $f'(x)$.*

2 Interprétation graphique

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a.



Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ et, pour $x \in I$, soit M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Alors le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Ainsi, lorsque x tend vers a, le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers $f'(a)$.

Définition 12 *On appelle* **tangente à $\mathcal{C}_f$ en** *A la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.*

Intuitivement, la tangente est la « limite » des droites (AM) lorsque M tend vers A.

Proposition 4 *Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.*

3 Opérations sur les dérivées

Proposition 5 *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in I$. Soit α un réel.*

(i) Si u et v sont dérivables en a, alors $u + v$ aussi, et $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

(ii) Si u est dérivable en a, alors αu aussi, et $(\alpha u)'(a) = \alpha u'(a)$.

(iii) Si u et v sont dérivables en a, alors $u \times v$ aussi, et $(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.

(iv) Si u est dérivable en a et que $u(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable en a, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(a) = -\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$.

(v) Si u et v sont dérivables en a et que $v(a) \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en a, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$.

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Corollaire 6 *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

(i) Si u et v sont dérivables sur I, alors $u + v$ aussi, et $(u + v)' = u' + v'$.

(ii) Si u est dérivable sur I, alors αu aussi, et $(\alpha u)' = \alpha u'$.

(iii) Si u et v sont dérivables sur I, alors $u \times v$ aussi, et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

(iv) Si u est dérivable sur I et qu'elle ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

(v) Si u et v sont dérivables sur I et que v ne s'annule pas, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

4 Dérivée d'une composée

Proposition 7 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.*

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Corollaire 8 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et que g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.*

Exemple : Soit $h(x) = \sin(\ln x)$. On peut écrire $h = g \circ f$ en posant $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \sin x$.
f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$, et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \cos(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

5 Dérivée d'une application réciproque

Proposition 9 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I (f définit donc une bijection de I sur $f(I)$). Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Corollaire 10 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f définit une bijection de I sur $f(I)$, f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et :*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^2$. Elle définit une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, et sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$ par $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$.
f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x)=2x$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.
f' ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ (il faut enlever 0 car $f'(0)=0$), donc le corollaire permet d'affirmer que f^{-1} est dérivable sur $f(\,]0,+\infty[\,)=]0,+\infty[$, et pour tout $y\in\,]0,+\infty[$:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{2f^{-1}(y)}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

6 Dérivées successives

Si f est dérivable sur I, on peut définir sa fonction dérivée f'. Si f' est elle-même dérivable sur I, alors on peut définir sa fonction dérivée $(f')'$: on l'appelle **dérivée seconde de** f et on la note f'' ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

Plus généralement on définit par récurrence les dérivées successives de f :

- On pose $f^{(0)}=f$.
- Si $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$.

La fonction $f^{(n)}$ est appelée **dérivée** n^e **de** f **sur** I, ou **dérivée d'ordre** n **de** f **sur** I, et on peut la noter aussi $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Exercice 5 Calculer la dérivée n^e des fonctions suivantes :

$$x\mapsto e^x \;\;;\;\; x\mapsto\sin x \;\;;\;\; x\mapsto\cos x \;\;;\;\; x\mapsto\ln x.$$

III Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

1 Fonction logarithme népérien

• Définition

Définition 13 *On appelle fonction* **logarithme népérien** *l'unique primitive sur* $]0,+\infty[$ *de la fonction* $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ *qui s'annule en 1.*

On a donc $\ln 1=0$ et, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $\ln x=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t}$.

• Propriétés

Le logarithme transforme les produits en sommes :

Proposition 11 *Pour tous* $x,y\in\,]0,+\infty[$ *:*

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y.$$

Démonstration :
Soit $y\in\,]0,+\infty[$ fixé. Posons $g(x)=\ln(xy)-\ln x$. Alors, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{y}{xy}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=0$.
La fonction g est donc constante sur $]0,+\infty[$. Or $g(1)=\ln y$, donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ on a $g(x)=\ln y$, soit $\ln(xy)-\ln x=\ln y$, d'où $\ln(xy)=\ln x+\ln y$. $\square$

Corollaire 12 *Pour tous* $x,y\in\,]0,+\infty[$ *:*

(i) $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$.

(ii) $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$.

(iii) Pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $\ln x^r=r\ln x$.

Démonstration :
(i) D'après la proposition précédente, $\ln\dfrac{1}{x}+\ln x=\ln\left(\dfrac{1}{x}\times x\right)=\ln 1=0$, donc $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$.

(ii) De même, $\ln x=\ln\left(\dfrac{x}{y}\times y\right)=\ln\dfrac{x}{y}+\ln y$, donc $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$.

(iii) Par récurrence immédiate si $r \in \mathbb{N}$, en écrivant $x^r = \dfrac{1}{x^{-r}}$ si $r \in \mathbb{Z}_-^*$, et $q \ln x^{\frac{p}{q}} = \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = \ln x^p = p \ln x$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. □

Remarque : $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels : si $r \in \mathbb{Q}$, on peut l'écrire sous la forme $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Par définition $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ pour tout réel $x > 0$ (par exemple, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$). On verra au paragraphe 4 comment on définit x^a pour tout réel a.

• Variations et limites

Par définition, ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, et, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

ln est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On admet que :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Par conséquent :

Proposition 13 *La fonction* ln *est une bijection strictement croissante de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Corollaire 14 *Pour tout* $x, y \in]0, +\infty[$ *:*

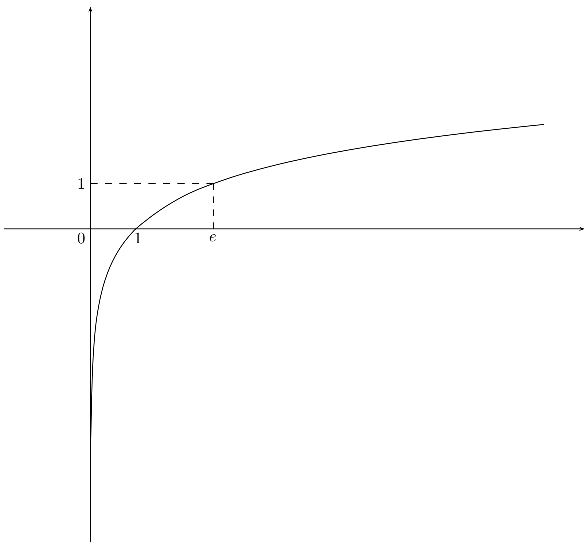
$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

Limites usuelles à connaître :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

La première limite implique que la courbe représentative de ln admet une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$. La troisième correspond à la dérivée de ln en 1.



Proposition 15 *Pour tout réel* $x > -1$*,* $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration :
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $]-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$ on en déduit que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x < -1$, ce qui donne l'inégalité demandée. □

• Fonction logarithme décimal, fonction logarithme de base 2

Définition 14 *La* **fonction logarithme décimal** *est la fonction notée* log *ou* $\log_{10}$ *définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

La propriété fondamentale de ln et ses conséquences restent valables :

Proposition 16 *Pour tous* $x, y \in]0, +\infty[$ *:*

(i) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(ii) $\log \dfrac{1}{x} = -\log(x)$.

(iii) $\log \dfrac{x}{y} = \log(x) - \log(y)$.

(iv) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\log(x^r) = r \log(x)$.

Remarque : En particulier, le (iv) implique :

$$\log(10^r) = r.$$

On définit de la même manière la **fonction logarithme de base 2** notée $\log_2$ sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

La proposition 16 est valable également pour cette fonction, et pour tout r on a

$$\log_2(2^r) = r.$$

2 Fonction exponentielle

• Définition

On a vu que la fonction ln est une bijection de $]0 + \infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 15 *La* **fonction exponentielle** *(de base e) est la fonction réciproque de* ln. *On la note* exp.

Remarque : La notation e^x sera introduite au paragraphe 4.

De la définition on déduit :

Proposition 17

(i) exp *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, +\infty[$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$, *et pour tout* $x \in]0, +\infty[$, $\exp(\ln(x)) = x$.

(iii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$$
$$\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

• Propriétés

L'exponentielle transforme les sommes en produits :

Proposition 18 *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Démonstration :

On a, d'une part, $\ln(\exp(x + y)) = x + y$ et, d'autre part, $\ln(\exp(x) \times \exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$, donc $\ln(\exp(x + y)) = \ln(\exp(x) \times \exp(y))$, d'où $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ puisque ln est une bijection. □

Corollaire 19

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Démonstration :

(i) $\exp(x) \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$, donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(ii) $\exp(x - y) \exp(y) = \exp(x - y + y) = \exp(x)$, donc $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. □

• Variations et limites

Proposition 20 exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Démonstration :
La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, $\exp = \ln^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$. □

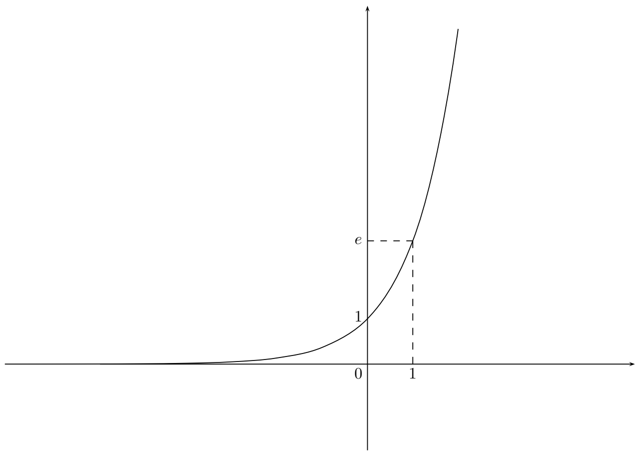
Limites : on a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc, puisque $\exp = \ln^{-1}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Autres limites à connaître :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x \exp(-x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

La première limite implique que la courbe représentative de exp admet une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$. La troisième limite correspond à la dérivée de l'exponentielle en 0.



Proposition 21 *Pour tout réel* x*,* $\exp(x) \geqslant 1 + x$*.*

Démonstration : Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \exp(x) - 1 - x$. □

3 Fonctions hyperboliques

• Cosinus et sinus hyperboliques d'un réel

Définition 16 *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. Le* **cosinus hyperbolique de** x *et le* **sinus hyperbolique de** x *sont les réels notés respectivement* $\operatorname{ch} x$ *(ou* $\cosh x$*) et* $\operatorname{sh} x$ *(ou* $\sinh x$*) définis par :*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On remarquera l'analogie avec les formules d'Euler. La tangente hyperbolique, définie par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, existe aussi, mais son étude n'est pas au programme.

Proposition 22 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{cases}$.

De manière analogue à la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a :

Proposition 23 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Démonstration : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x e^{-x} = 1$. □

Il existe de nombreuses autres formules de trigonométrie hyperbolique mais celle ci-dessus est la seule au programme.

• Etude des fonctions ch et sh

Proposition 24 *La fonction* ch *est paire, la fonction* sh *est impaire.*

Démonstration : $\operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$. □

Avec la relation $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, on voit ainsi que ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de l'exponentielle (voir chapitre 1, proposition 6).

Proposition 25 *Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x.$$

Démonstration : Immédiat. □

Pour tout réel x on a $\operatorname{ch} x > 0$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\operatorname{sh} 0 = 0$, donc $\operatorname{sh} x$ est du signe de x. Par conséquent, ch est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

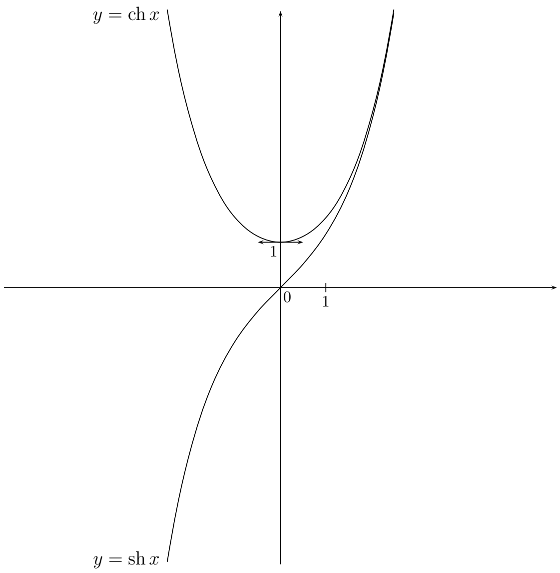
Limites : on a facilement

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$$

On notera aussi que $\operatorname{ch} 0 = 1$.

Par croissances comparées on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = +\infty$, donc les courbes représentatives de ch et sh admettent des branches paraboliques d'axe (Oy) en $+\infty$ (et en $-\infty$ par parité).



Limite usuelle (qui correspond à la dérivée de sh en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$$

4 Fonctions puissances

• Puissances à exposant réel

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a vu que si x est un *rationnel*, alors $x \ln a = \ln(a^x)$, donc $\exp(x \ln a) = \exp(\ln a^x) = a^x$. Par analogie, on va *définir* :

Définition 17 *Pour tout* x réel *et pour tout* a *réel strictement positif :*

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Si $a = e$, on obtient :
$$e^x = \exp(x),$$
donc :

Proposition 26 *Pour tout $a \in]0, +\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*
$$a^x = e^{x \ln a}.$$

La formule $\ln(a^x) = x \ln a$ est donc maintenant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Propriétés

Proposition 27 *Pour tous $a, b \in]0, +\infty[$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

(iii) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(v) $(ab)^x = a^x b^x$.

(vi) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Démonstration :
(i), (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates des propriétés de exp.
(iv) $(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$.
(v) $(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a + x \ln b} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x$.
(vi) Analogue. □

• Définition

Définition 18 *Les fonctions puissances sont les fonctions du type :*
$$x \mapsto x^\alpha,$$
où α est un réel.

Par définition, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, donc ces fonctions sont définies sur $]0, +\infty[$.

Remarques :

1) Ne pas confondre les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ et les fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$.

2) Si $\alpha = 0$ alors $x^\alpha = x^0 = e^{0 \ln x} = 1$ pour tout x : la fonction est constante. Dans la suite on supposera $\alpha \neq 0$.

• Variations et limites

Proposition 28 *La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$:*
$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration : L'égalité $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et la formule $(e^u)' = u' e^u$ donnent $f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \dfrac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. □

Les variations de f_α dépendent donc du signe de α : si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

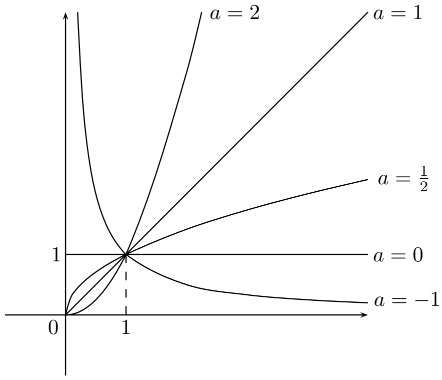
Limites :

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \alpha \ln x = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ -\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$.

De même, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \alpha \ln x = \begin{cases} -\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$.

Branche infinie en $+\infty$ (si $\alpha > 0$) : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \\ 0 \text{ si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$.

En $+\infty$, la courbe admet donc une branche parabolique d'axe (Oy) si $\alpha > 1$ et une branche parabolique d'axe (Ox) si $0 < \alpha < 1$ (si $\alpha = 1$, $x^\alpha = x$).



• DÉRIVATION D'UNE FONCTION DE LA FORME $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $u > 0$ sur I.

Alors la fonction $u^v : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur I car $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

Pour calculer sa dérivée on utilise les formules de dérivation $(e^u)' = u'e^u$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Attention : on ne peut pas utiliser la formule $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ qui n'est valable que si α est une *constante*.

Exercice 6 Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x}}$.

5 Croissances comparées

Quand il y a conflit (limite avec forme indéterminée), les exponentielles l'emportent sur les puissances, qui elles-mêmes l'emportent sur les logarithmes :

Proposition 29 *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0.$$

Démonstration :

Se ramener aux limites usuelles. Par exemple $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\beta/\alpha \ln x^{\alpha/\beta}}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\dfrac{\ln X}{X} \overset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Exercice 7 Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{0,001x}}{x^{1000}} \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{0,001x}}{x^{1000}} \quad c)\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x \quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\ln x\right) \quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

IV Fonctions circulaires et réciproques

1 Fonction cosinus

La fonction cosinus est 2π-périodique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

Pour tracer sa courbe représentative il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π. On choisit un intervalle centré en 0 : $[-\pi, \pi]$.

De plus, la fonction cosinus est paire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x.$$

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent, il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle $[0, \pi]$.

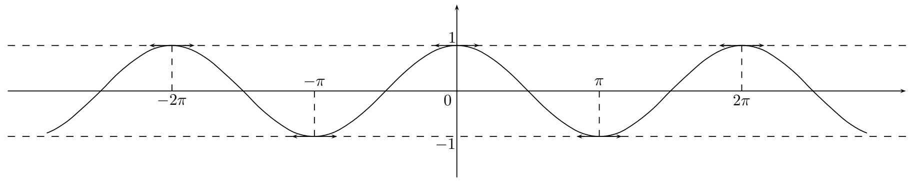
Proposition 30 *La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\cos'(x) = -\sin x.$$

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Sur $]0,\pi[$ le sinus est strictement positif, donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

x	0		π
$-\sin x$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1



2 Fonction sinus

La fonction sinus est 2π-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Et elle est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x.$$

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. Par conséquent, il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle $[0,\pi]$.

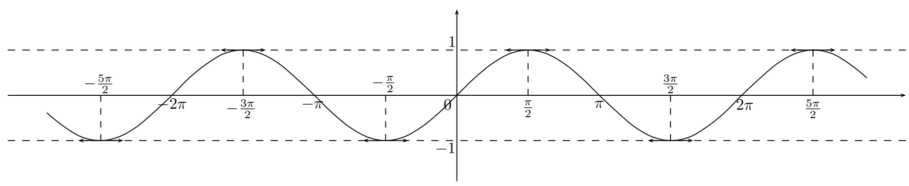
Proposition 31 *La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sin'(x) = \cos x.$$

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Si $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\cos x > 0$, et si $\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ alors $\cos x < 0$. La fonction sinus est donc strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Limite à connaître (qui correspond à la dérivée de sin en 0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Proposition 32 *Pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$.*

Démonstration :

Posons $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = \sin x + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ et $g'(x) = \cos x + 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est décroissante et g est croissante. Or $f(0) = g(0) = 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$ alors que g est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x \geqslant 0$ on a donc $\sin x - x \leqslant 0$ et $\sin x + x \geqslant 0$, d'où $-x \leqslant \sin x \leqslant x$. Pour $x \leqslant 0$ on a $\sin x - x \geqslant 0$ et $\sin x + x \leqslant 0$, d'où $x \leqslant \sin x \leqslant -x$. Dans les deux cas on a $-|x| \leqslant \sin x \leqslant |x|$, donc $|\sin x| \leqslant |x|$. □

3 Fonction tangente

On rappelle que, pour tout x non congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Notons $D_{\tan}$ son ensemble de définition : $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

La fonction tangente est π-périodique :

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x+\pi) = \tan x.$$

Pour tracer sa courbe représentative il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur π. On choisit un intervalle centré en 0 : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

De plus, la fonction tangente est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(-x) = -\tan x.$$

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. Par conséquent, il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition 33 *La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$, et pour tout $x \in D_{\tan}$:*

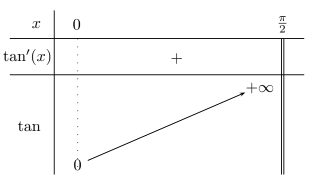
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

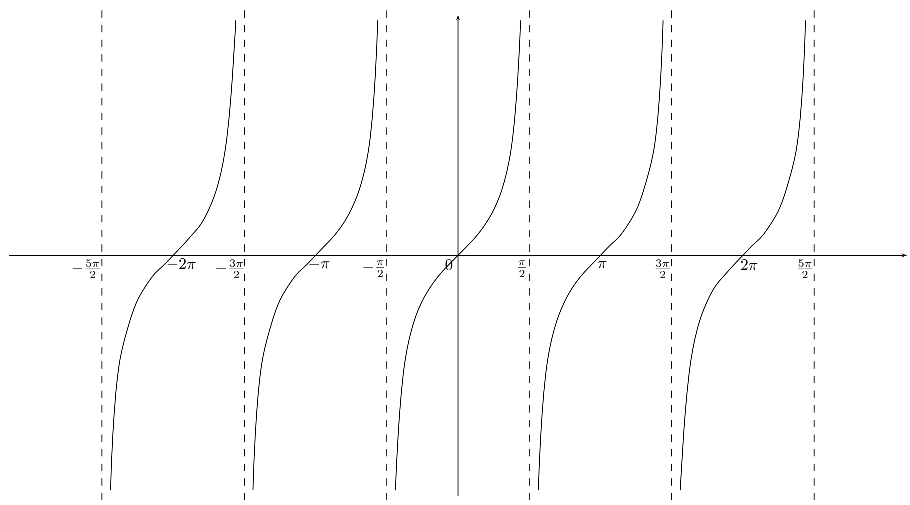
Démonstration : sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et cos ne s'annule pas sur $D_{\tan}$, donc $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur $D_{\tan}$, et pour tout $x \in D_{\tan}$, $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$, ce qui donne $1 + \tan^2 x$ en séparant la fraction, ou $\frac{1}{\cos^2 x}$ en utilisant l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. □

La fonction tan est donc strictement croissante sur tout intervalle de $D_{\tan}$, et en particulier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Limite en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$: on a $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0^+$, donc :

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty.$$





Limite usuelle à connaître :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

4 Fonction arcsinus

• Définition et propriétés

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas une bijection : tout $y \in [-1, 1]$ a une infinité d'antécédents par sin.

Considérons sa restriction à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire la fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.

f est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc f définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.

Définition 19 *La réciproque de f est appelée* **fonction arcsinus** *et notée* Arcsin *ou* arcsin*.*

Arcsin est donc une bijection de $[-1, 1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit :

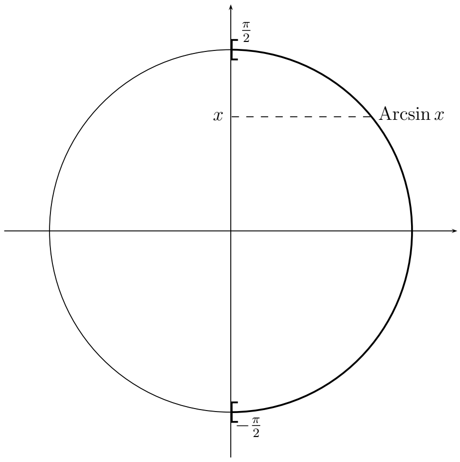
Proposition 34

(i) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$, et pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.

(ii) Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $y \in [-1, 1]$:

$$\sin x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Arcsin} y.$$

Par exemple, on a $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$, $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.



Remarque : Il faut faire attention aux intervalles. En particulier, l'égalité $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ n'est valable que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par exemple $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ et non π.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sin x = \frac{1}{2}$ puis $\sin x = \frac{1}{4}$.

Proposition 35
(i) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$.
(ii) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Démonstration :
(i) Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$, donc $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$ (car $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$).
Par conséquent, $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$ ou $-\sqrt{1 - x^2}$.
Or $\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geqslant 0$, et donc $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$.
(ii) $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. $\square$

• Étude de la fonction arcsinus

Proposition 36 *La fonction arcsinus est impaire :*

$$\forall x \in [-1, 1],\ \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x.$$

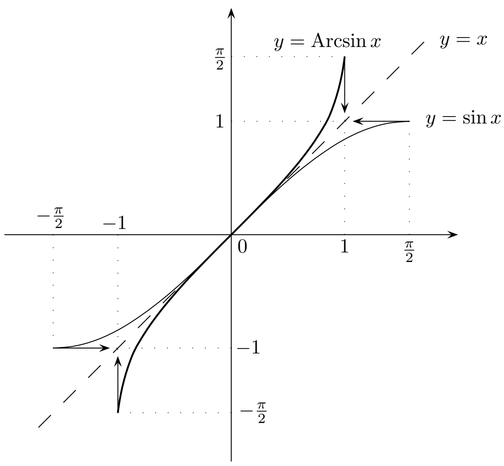
Démonstration :
Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $y = \operatorname{Arcsin}(-x)$. Alors $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin y = -x$. Par conséquent, $x = -\sin y = \sin(-y)$ puisque sin est impaire.
Alors $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(\sin(-y)) = -y$ car $-y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc bien $y = -\operatorname{Arcsin} x$. $\square$

Proposition 37 *La fonction* Arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et, pour tout* $x \in]-1, 1[$ *:*

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Démonstration :
On utilise le théorème de dérivation des fonctions réciproques.
La fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $f'(x) = \cos x$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
f' ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (et non $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ car $\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$).
Par conséquent, $f^{-1} = \operatorname{Arcsin}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ (car $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$), et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. $\square$

La fonction Arcsin est donc strictement croissante sur $[-1, 1]$.



5 Fonction arccosinus

• Définition et propriétés

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas une bijection : tout $y \in [-1, 1]$ a une infinité d'antécédents par cos.

Considérons la restriction de cos à l'intervalle $[0, \pi]$, c'est-à-dire la fonction $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$.

f est dérivable et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, donc f définit une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

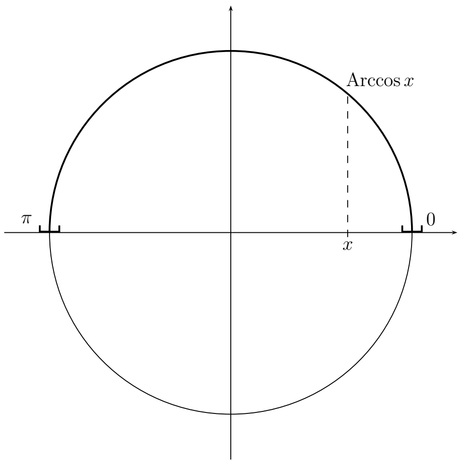
Définition 20 *La réciproque de f est appelée* **fonction arccosinus** *et notée* Arccos.

Arccos est donc une bijection de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. On en déduit :

Proposition 38
(i) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\mathrm{Arccos}(\cos x) = x$, et pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$.
(ii) Pour tout $x \in [0, \pi]$ et pour tout $y \in [-1, 1]$:

$$\cos x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{Arccos}\, y.$$

Par exemple, $\mathrm{Arccos}\, 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arccos}\, 1 = 0$, $\mathrm{Arccos}(-1) = \pi$, $\mathrm{Arccos}\, \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.



Remarque : Comme pour arcsinus, il faut faire attention aux intervalles. En particulier, l'égalité $\mathrm{Arccos}(\cos x) = x$ n'est valable que si $x \in [0, \pi]$. Par exemple $\mathrm{Arccos}(\cos(2\pi)) = \mathrm{Arccos}\, 1 = 0$ et non 2π.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = \dfrac{1}{2}$ puis $\cos x = \dfrac{1}{4}$.

Proposition 39
(i) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(ii) Pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\tan(\mathrm{Arccos}\, x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

Démonstration : Analogue à celle de la proposition 37. □

Proposition 40 *Pour tout* $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration :

Soit $x \in [-1,1]$ et soit $y = \operatorname{Arccos} x$. Alors $x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$. De plus $y \in [0,\pi]$ donc $-y \in [-\pi, 0]$ et $\frac{\pi}{2} - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent $\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{Arcsin} x$, et donc $\frac{\pi}{2} = y + \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$. □

• Etude de la fonction arccosinus

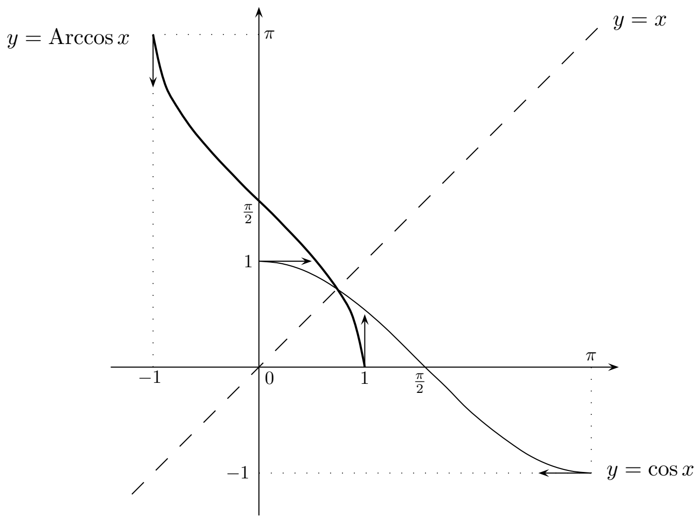
Remarquons que la fonction arccosinus n'est ni paire ni impaire, puisque $\operatorname{Arccos} 1 = 0$ alors que $\operatorname{Arccos}(-1) = \pi$.

Proposition 41 *La fonction* Arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et, pour tout* $x \in]-1,1[$ *:*

$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration : D'après la proposition précédente, $\operatorname{Arccos} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}$, donc $\operatorname{Arccos}' = -\operatorname{Arcsin}'$. □

La fonction Arccos est donc strictement décroissante sur $[-1,1]$.



6 Fonction arctangente

• Définition et propriétés

Considérons la restriction de tan à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire la fonction $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$.

f est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 21 *La réciproque de f est appelée* **fonction arctangente** *et notée* Arctan.

Arctan est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit :

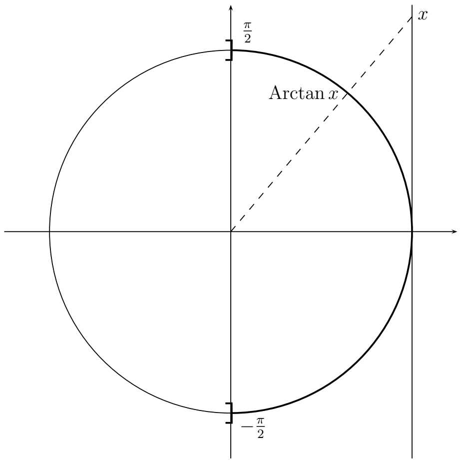
Proposition 42

(i) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.

(ii) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *:*

$$\tan x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Arctan} y.$$

Par exemple, $\operatorname{Arctan} 0 = 0$, $\operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.



Remarque : Il faut faire attention aux intervalles. En particulier, l'égalité $\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$ n'est valable que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par exemple $\mathrm{Arctan}(\tan \pi) = \mathrm{Arctan}\, 0 = 0$ et non π.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\tan x = 1$ puis $\tan x = \frac{1}{2}$.

Proposition 43

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Démonstration :

(i) Analogue à celle de la proposition 37 en partant de l'égalité $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

(ii) $\sin = \tan . \cos$. □

• Etude de la fonction arctangente

Proposition 44 *La fonction arctangente est impaire :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}(-x) = -\mathrm{Arctan}\, x.$$

Démonstration : Analogue à celle de la proposition 38. □

Proposition 45 *La fonction* Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration :

On utilise le théorème de dérivation des fonctions réciproques.

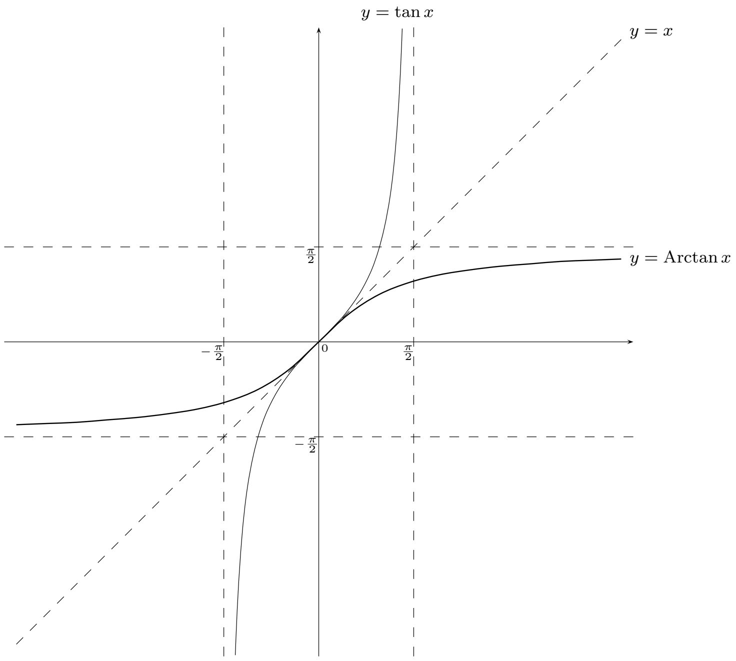
La fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

f' ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, $f^{-1} = \mathrm{Arctan}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\, x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$. □

La fonction Arctan est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites : $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}.$$



V Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1 Notions sur les fonctions à valeurs complexes

Définition 22 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit les fonctions* **partie réelle de** f*, notée* $\operatorname{Re} f$*, et* **partie imaginaire de** f*, notée* $\operatorname{Im} f$*, par :*

$$\forall\, x \in I, \begin{cases} (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \\ (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)) \end{cases}.$$

$\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc des fonctions à valeurs *réelles*, et $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = (x+i)^2$. Alors, pour tout x, on peut écrire $f(x) = x^2 + 2ix - 1$, donc $(\operatorname{Re} f)(x) = x^2 - 1$ et $(\operatorname{Im} f)(x) = 2x$.

Définition 23 $f : I \to \mathbb{C}$ *est* **dérivable sur** I *si* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *le sont, et la* **fonction dérivée de** f *est alors définie sur* I *par :*

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'.$$

On montre facilement que les propriétés du paragraphe II.3 (opérations sur les dérivées) restent valables.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = (x+i)^2$. Alors, pour tout x, on a $(\operatorname{Re} f)'(x) = 2x$ et $(\operatorname{Im} f)'(x) = 2$, donc $f'(x) = 2x + 2i$. On peut aussi dériver directement avec la formule $(u^2)' = 2uu'$.

2 Dérivée de e^u

On rappelle que si $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), alors $e^z = e^x e^{iy}$.

Proposition 46 *Si la fonction* $u : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable sur* I*, alors la fonction* e^u *aussi, et*

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Démonstration :
Notons f la fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$. Posons $u_1 = \operatorname{Re} u$ et $u_2 = \operatorname{Im} u$.
Pour tout $x \in I$, on a alors $f(x) = e^{(u_1 + iu_2)(x)} = e^{u_1(x)} e^{iu_2(x)} = e^{u_1(x)}(\cos u_2(x) + i \sin u_2(x)) = e^{u_1(x)} \cos u_2(x) + ie^{u_1(x)} \sin u_2(x)$, donc $(\operatorname{Re} f)(x) = e^{u_1(x)} \cos u_2(x)$ et $(\operatorname{Im} f)(x) = e^{u_1(x)} \sin u_2(x)$.
u est dérivable sur I, donc u_1 et u_2 aussi, et $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ également. Par conséquent f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x) \\
&= u_1'(x)e^{u_1(x)} \cos u_2(x) - u_2'(x)e^{u_1(x)} \sin u_2(x) + i(u_1'(x)e^{u_1(x)} \sin u_2(x) + u_2'(x)e^{u_1(x)} \cos u_2(x)) \\
&= u_1'(x)e^{u_1(x)}(\cos u_2(x) + i \sin u_2(x)) + u_2'(x)e^{u_1(x)}(-\sin u_2(x) + i \cos u_2(x)) \\
&= u_1'(x)e^{u_1(x)}(\cos u_2(x) + i \sin u_2(x)) + iu_2'(x)e^{u_1(x)}(\cos u_2(x) + i \sin u_2(x)) \\
&= u_1'(x)e^{u_1(x)}e^{iu_2(x)} + iu_2'(x))e^{u_1(x)}e^{iu_2(x)} \\
&= (u_1'(x) + iu_2'(x))e^{u_1(x)+iu_2(x)} \\
&= u'(x)e^{u(x)}. \square
\end{aligned}$$