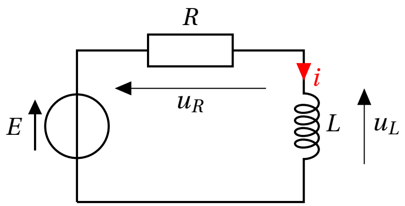
TD6 : Régimes transitoires du premier ordre - corrigé

Application 1



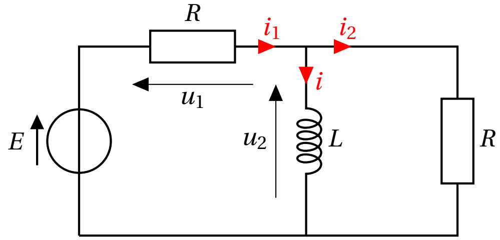
On applique la loi des mailles puis on écrit la loi d'Ohm et la relation courant-tension de la bobine :

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On écrit l'équation sous forme canonique : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$. La constante de temps est $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$.

Application 2

D'après la loi des nœuds : $i_1 = i + i_2$. On cherche ensuite à exprimer i_1 et i_2 en fonction de i en tirant sur le fil.



- Loi de la bobine : $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
- loi d'Ohm : $i_2 = \frac{u_2}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
- loi des mailles : $u_1 = E - u_2 = E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
- loi d'Ohm : $i_1 = \frac{u_1}{R} = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

On injecte les expressions de i_1 et i_2 dans la loi des nœuds :

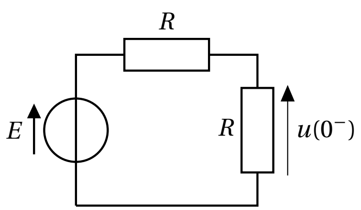
$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{2L}i = \frac{E}{2L}}$$

La constante de temps est $\boxed{\tau = \frac{2L}{R}}$.

Application 3

1. À $t = 0^-$ l'interrupteur K est en position 2 depuis longtemps, le circuit n'est pas alimenté donc $u(0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur on conclut que $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$.

2. À $t = 0^-$ l'interrupteur K est en position 1 depuis longtemps. On est en régime permanent et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le schéma équivalent est représenté ci-contre. On applique la loi du pont diviseur de tension :



$$\boxed{u(0^-) = u(0^+) = \frac{E}{2}}$$

Application 4

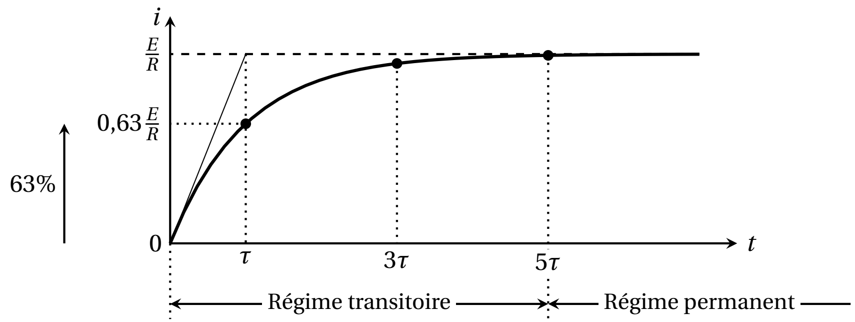
1. On a établi dans l'application 1 : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$. La constante de temps est $\tau = \frac{L}{R}$.

À l'instant $t = 0^-$ l'interrupteur K est en position 2 depuis longtemps (circuit non alimenté) donc le courant ne circule pas : $i(0^-) = 0$. Par continuité de l'intensité dans la branche d'une bobine on conclut que $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

On détermine la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $\frac{R}{L}i_p = \frac{E}{L} \iff i_p = \frac{E}{R}$.

La solution générale s'écrit $i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$. Cette expression prédit que $i(0^+) = A + \frac{E}{R}$. La constante d'intégration A compatible avec la condition initiale vérifie : $A + \frac{E}{R} = 0 \iff A = -\frac{E}{R}$.

On conclut que $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$. On trace son graphe.

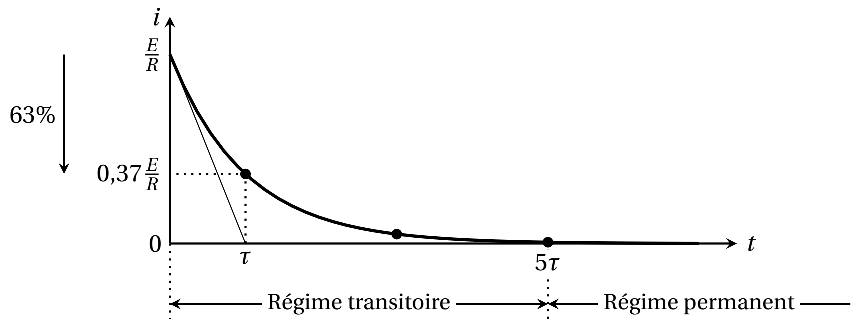


2. L'équation différentielle est semblable à celle de la question 1, mais sans la f.e.m. : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$.

À l'instant $t = 0^-$l'interrupteur K est en position 1 depuis longtemps. On est en régime permanent et la bobine se comporte comme un court-circuit. En appliquant la loi des mailles on trouve rapidement que $i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}$.

Il n'y a pas de solution particulière car l'équation est homogène : $i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec toujours $\tau = L/R$.

On calcule A avec la condition initiale : $i(0^+) = A = \frac{E}{R}$. On conclut : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

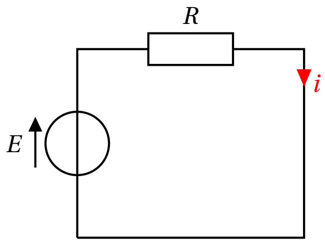


Application 5

1. On écrit le bilan d'énergie de la bobine :

$$\Delta\mathscr{E}_b = \frac{1}{2}L\left(i^2(\infty) - i^2(0)\right) = W_b \iff \boxed{W_b = \frac{LE^2}{2R^2}}$$

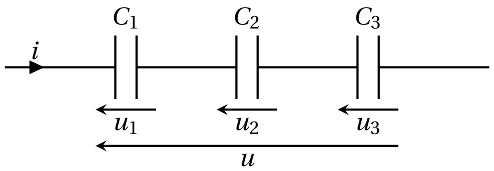
2. En régime permanent la bobine se comporte comme un court-circuit. Le circuit est fermé donc un courant peut circuler. Cela signifie que le résistor consomme une puissance électrique constante $\mathscr{P} = Ri^2$ et donc par conservation de l'énergie électrique que le générateur lui fournit la même puissance. En régime permanent le générateur fournit continûment de l'énergie au circuit et celle-ci **est consommée par le résistor**.



3. Un circuit RL série permet de stocker une certaine quantité d'énergie sous forme magnétique. Malheureusement ce dispositif n'est pas du tout économe en énergie car il faut dépenser de l'énergie en continu pour maintenir le stockage ! Un circuit RC convient mieux, bien qu'il ne soit pas parfait non plus (rendement de 50 % pour une charge avec un échelon de tension de 0 à E).

Exercice 1 : Bobines et condensateurs en série/parallèle

1. Condensateurs en série

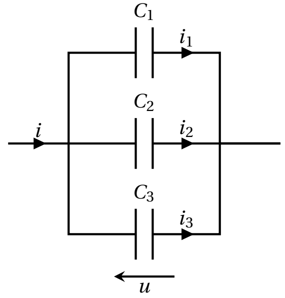


D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \iff \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{du_3}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} + \frac{i}{C_3}$$

On en déduit que $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_{eq}}$ avec $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$.

Condensateurs en dérivation

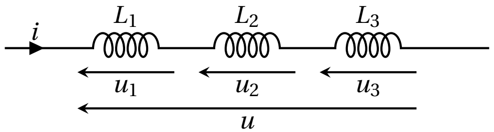


D'après la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = C_1\frac{du}{dt} + C_2\frac{du}{dt} + C_3\frac{du}{dt}$$

On en déduit que $i = C_{eq}\frac{du}{dt}$ avec $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$.

Bobines en série

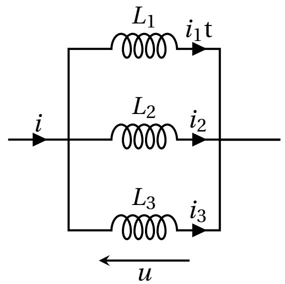


D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt}$$

On en déduit que $u = L_{eq}\frac{di}{dt}$ avec $\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3}$.

Bobines en dérivation



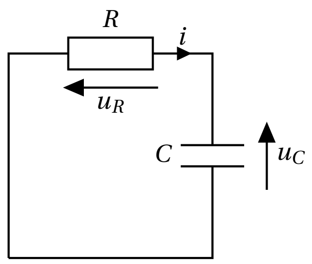
D'après la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \iff \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \frac{u}{L_3}$$

On en déduit que $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L_{eq}}$ avec $\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}$.

Exercice 2 : Résistance d'un voltmètre

1. Une fois le condensateur branché sur le voltmètre, le circuit se comporte comme un **RC série en régime libre**.



Par continuité, la tension aux bornes du condensateur, à l'instant du branchement, vaut $u(0^+) = u_0$.

La résolution de l'équation différentielle (analogue à celle vue en cours) donne comme expression de la tension aux bornes du condensateur (donc celle affichée par le voltmètre) : $u(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$. En se plaçant à la date $t = 200\,\mathrm{s}$, on peut déterminer la valeur de la résistance du voltmètre :

$$\boxed{R = \frac{t}{C\ln\left(\frac{u_0}{u}\right)} = 10\,\mathrm{M\Omega}}$$

⋆ Exercice 3 : Établisssement du courant dans une bobine

1. Le circuit se comporte comme un RL série soumis à un échelon de tension. L'intensité qui circule dans la maille vaut (voir cours pour la démo) : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)}$.

2.D'après la loi d'Ohm, on en déduit que la tension aux bornes de la résistance vaut $u_R(t) = Ri(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$. En se plaçant à la date $t = 2\,\mathrm{ms}$, on peut exprimer l'inductance de la bobine :

$$\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) = 1 - \frac{u_R}{E} \iff \boxed{L = \frac{Rt}{\ln\left(\frac{E}{E-u_R}\right)} = 50\,\mathrm{mH}}$$

3. À la date, $t = 2\,\mathrm{ms}$, l'énergie emmagasinée par la bobine vaut $\boxed{\mathscr{E}_L = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{Lu_R^2(t)}{2R^2} = 8{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}}$.

4. On réalise un bilan d'énergie du circuit, entre les dates $t_0 = 0^+$ et $t = 2\,\mathrm{ms}$:

$$E_E = E_L + E_R$$

où E_E, E_L et E_R sont respectivement l'énergie fournie par le générateur, reçue par la bobine et reçue par la résistance, entre t_0 et t. On peut écrire :

$$E_L = \mathscr{E}_L(t) - \underbrace{\mathscr{E}_L(0^+)}_{=0} = 8{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

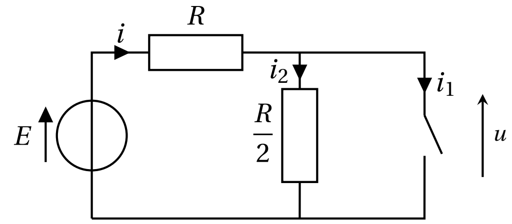
On détermine ensuite E_E :

$$E_E = \int_{0^+}^{t} Ei(t)\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_{0^+}^{t}\left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right]\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[t + \frac{L}{R}\left(\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) - 1\right)\right] = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

On en déduit enfin l'énergie dissipée par effet Joule :

$$\boxed{E_R = E_E - E_L = 3{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}}$$

⋆ Exercice 4 : Circuit $R + R\|C$



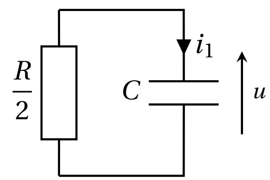
1. À $t = 0^-$, le condensateur est chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i_1(0^-) = 0}$. On écrit ensuite $i(0^-) = i_2(0^-)$ (loi des nœuds) puis $\boxed{u(0^-) = \frac{R/2}{R + R/2}E = \frac{E}{3}}$ (loi du pont diviseur de tension, valable ici car R et $R/2$ sont parcourues par le même courant à $t = 0^-$).

On détermine enfin $\boxed{i(0^-) = i_2(0^-) = \frac{2E}{3R}}$ (loi d'Ohm pour $R/2$).

2. Par continuité $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = \frac{E}{3}}$, donc $\boxed{i_2(0^+) = \frac{2E}{3R}}$ (loi d'Ohm). On peut également dire que $\boxed{i(0^+) = 0}$ (branche ouverte à partir de $t = 0$). Enfin, $\boxed{i_1(0^+) = -i_2(0^+) = -\frac{2E}{3R}}$ (loi des nœuds).

3. En régime permanent, on a toujours $\boxed{i(\infty) = 0}$ (branche ouverte). Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $\boxed{i_1(\infty) = 0}$ et $\boxed{i_2(\infty) = 0}$ (loi des nœuds). Enfin, $\boxed{u(\infty) = 0}$ (loi d'Ohm pour $R/2$).

4.

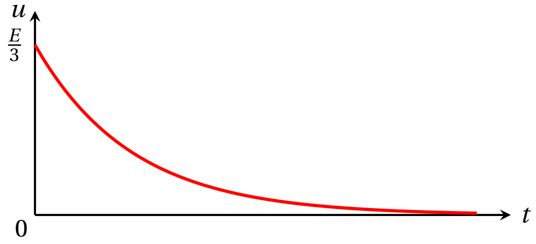


Une fois l'interrupteur ouvert, le circuit est un RC série en régime libre. L'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est la suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{RC}{2}}$$

Compte tenu de la condition initiale $u(0^+) = \frac{E}{3}$, la solution de l'équation est $\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$.

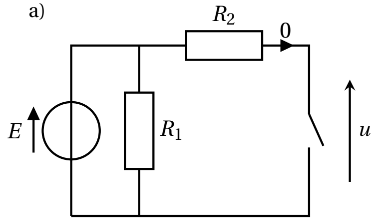
5.



6. Au cours de la décharge, le condensateur cède à la résistance une énergie $\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu^2(0^+) = \frac{CE^2}{18}}$.

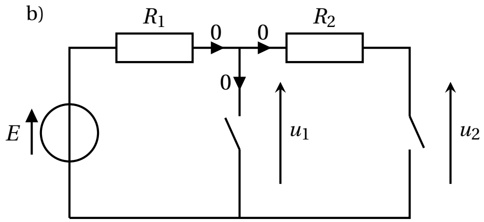
⋆ Exercice 5 : Recherche de régimes permanents

a)



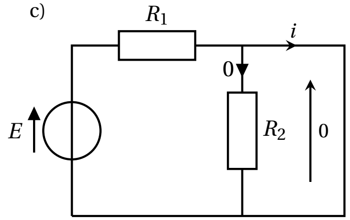
En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'après la loi d'Ohm, la tension aux bornes de R_2 est nulle. Par application de la loi des mailles, on trouve $\boxed{u = E}$.

b)



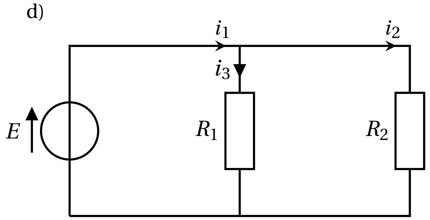
D'après la loi des nœuds, le courant qui circule dans R_1 est nul. Les tensions aux bornes des deux résistances sont nulles donc $\boxed{u_1 = u_2 = E}$.

c)



En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. La résistance R_2 est court-circuitée donc la tension à ses bornes est nulle. D'après la loi d'Ohm, le courant qui la traverse est nul aussi. En appliquant la loi des mailles, on trouve finalement que $\boxed{i = \frac{E}{R_1}}$.

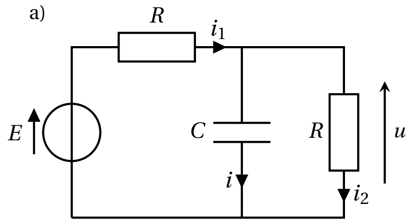
d)



La tension aux bornes de chaque résistance vaut E. D'après la loi d'Ohm, $\boxed{i_2 = \frac{E}{R_2}}$ et $i_3 = \frac{E}{R_1}$. En utilisant la loi des nœuds, on en déduit que $\boxed{i_1 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$.

⋆ Exercice 6 : Conditions initiales

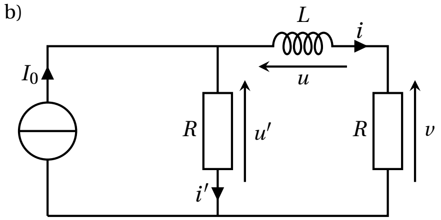
a)



Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$. On en déduit que $i_2(0^+) = 0$ (loi d'Ohm) et que $i_1(0^+) = i(0^+)$ (loi des nœuds).

Enfin, en appliquant la loi des mailles, on trouve $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$.

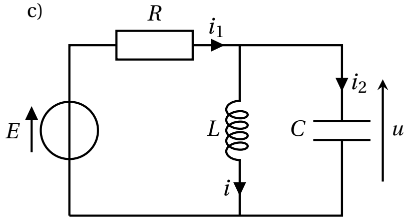
b)



Par continuité de l'intensité du courant qui circule dans une bobine, $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$. On en déduit que $\boxed{i'(0^+) = I_0}$ (loi des nœuds) puis que $u'(0^+) = RI_0$ (loi d'Ohm).

On peut également dire que $v(0^+) = 0$ (loi d'Ohm) et que $\boxed{u(0^+) = u'(0^+) = RI_0}$ (loi des mailles).

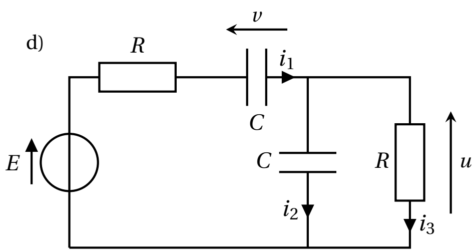
c)



Par continuité, $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ et $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$. On en déduit que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{L} = 0}$.

On peut également dire que $i_1(0^+) = i_2(0^+)$ (loi des nœuds) et $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$ (loi des mailles). La loi d'évolution du condensateur permet enfin de dire que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i_2(0^+)}{C} = \dfrac{E}{RC}}$.

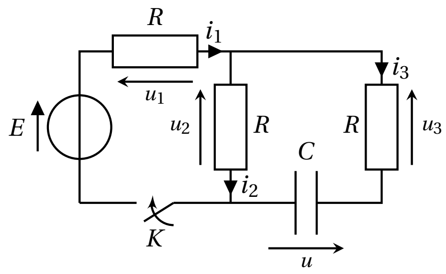
d)



Par continuité, $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ et $v(0^+) = v(0^-) = 0$. On en déduit que $i_3(0^+) = 0$ (loi d'Ohm), puis $i_1(0^+) = i_2(0^+)$ (loi des nœuds).

On écrit $i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{E}{R}$ (loi des mailles). Enfin, on en déduit que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i_2(0^+)}{C} = \dfrac{E}{RC}}$.

⋆⋆ Exercice 7 : Charge et décharge d'un condensateur



1. Dans un premier temps, on cherche à établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. D'après la loi des mailles :

$$E = u + u_3 + u_1 = u + Ri_3 + Ri_1$$

On exprime ensuite i_1 et i_3 en fonction de u.

- $\boxed{i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$ (loi d'évolution du condensateur),
- $u_3 = Ri_3 = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (loi d'Ohm),
- $u_2 = u + u_3 = U + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (loi des mailles),
- $i_2 = \frac{u_2}{R} = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (loi d'Ohm),
- $\boxed{i_1 = i_2 + i_3 = \dfrac{u}{R} + 2C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$ (loi des nœuds).

On réinjecte ces courants dans la loi des mailles initiale, ce qui aboutit à l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2u}{3RC} = \frac{E}{3RC}}$$

Par continuité, $u(0^+) = u(0^-) = 0$. Avec cette condition initiale, la solution de l'équation différentielle est la suivante :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{3RC}{2}}$$

On pouvait déterminer rapidement la valeur asymptotique de u en étudiant le circuit en régime permanent (condensateur assimilable à un interrupteur ouvert). Dans ce cas, $i_3 = 0$ donc $u_3 = 0$ (loi d'Ohm) et $u = u_2$ (loi des mailles). Par application de la loi du pont diviseur de tension (applicable ici car les deux résistances sont parcourues par le même courant en $t = \infty$) :

$$\boxed{u(\infty) = u_{\max} = \frac{R}{R+R}E = \frac{E}{2}}$$

Le résultat est cohérent avec l'expression de $u(t)$.

2. Une fois l'interrupteur ouvert, le circuit est équivalent à un condensateur en série avec une résistance $2R$ (on rassemble deux résistances R en série). C'est un circuit RC série en régime libre. L'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{2RC} = 0}$$

Par continuité, la condition initiale s'écrit $u(0^+) = u_{\text{max}} = \frac{E}{2}$ et la solution de l'équation est :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \text{ avec } \tau' = 2RC}$$

⋆⋆ Exercice 8 : Établissement du courant dans un circuit

1. Pour cette première question, le circuit est un RL série soumis à un échelon de tension. L'évolution d'un tel circuit a été étudiée en cours :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{I = \frac{E}{R}}$$

2. On peut simplifier l'étude du circuit en rassemblant les résistances R et R' branchées en dérivation. Le circuit se comporte comme un RL série, alimenté par une fem E, avec une résistance $R_{\text{eq}} = \frac{RR'}{R+R'}$. L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est la suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_{\text{eq}}\, i}{L} = \frac{E}{L}}$$

Par continuité, $i(0^+) = I = \frac{E}{R}$. La solution de l'équation s'écrit :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} + \frac{E}{R'}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right) \text{ avec } \tau' = \frac{L}{R_{\text{eq}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{I' = E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)}$$

⋆⋆ Exercice 9 : Charges successives d'un condensateur

On considère l'une des étapes de la charge, avec un générateur de fem $\frac{kE}{N}$ telle que $1 \leq k \leq N$. La tension aux bornes du condensateur passe de $u_c(0^+) = \frac{(k-1)E}{N}$ à $u_c(\infty) = \frac{kE}{N}$. L'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge vaut :

$$E_E(k) = \int_0^{\infty} \frac{kE}{N}\, i\, dt = \frac{kCE}{N}\left[u_c(\infty) - u_c(0^+)\right] = \frac{kCE^2}{N^2}$$

L'énergie totale fournie par le générateur sur l'intégralité des N charges vaut :

$$E_E = \sum_k E_E(k) = \frac{CE^2}{N^2}\sum_k k = \frac{CE^2}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{2} = \frac{CE^2}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

Au cours des N charges, la tension aux bornes du condensateur varie de 0 et E. L'énergie totale stockée par le condensateur vaut $E_c = \frac{1}{2}CE^2$.

Le rendement énergétique de cette charge vaut :

$$\boxed{\eta = \frac{E_c}{E_E} = \frac{1}{1+\frac{1}{N}} = \frac{N}{N+1} = \frac{10}{11} = 0,91}$$

Le rendement énergétique est de $\boxed{91\%}$ quand la charge est fractionnée en 10 étapes successives. Il est de 50% quand la charge est réalisée en une seule étape. En conclusion, on voit que le rendement est d'autant meilleur que la charge est fractionnée. Malheureusement, cet avantage est obtenu au prix d'un temps de charge plus long. La recharge d'un système électrique nécessite généralement un compromis entre rapidité et rendement énergétique.