CHAPITRE 9 Oscillateur harmonique

Ce chapitre traite d'un modèle, *l'oscillateur harmonique*, qui décrit les oscillations libres et sans pertes de certains systèmes physiques. Ce modèle a une grande importance pratique, d'une part car il est simple en termes mathématiques et d'autre part car il s'applique dans des situations nombreuses et variées en physique. On l'aborde sous l'angle de la mécanique mais on verra également des applications en électrocinétique.
D'un point de vue concret on continue d'utiliser le principe fondamental de la dynamique, dans un contexte différent du chapitre précédent. On présente un modèle simple pour la déformation élastique des ressorts et pour l'action mécanique d'un fil tendu. On montre que le modèle de l'oscillateur harmonique est associé à une certaine équation différentielle, dont on présente la forme canonique et dont les solutions sont des sinusoïdes. On en profite pour décrire de manière générale les fonctions sinusoïdales du temps avec le vocabulaire qui leur est associé.

1 Système {masse + ressort}

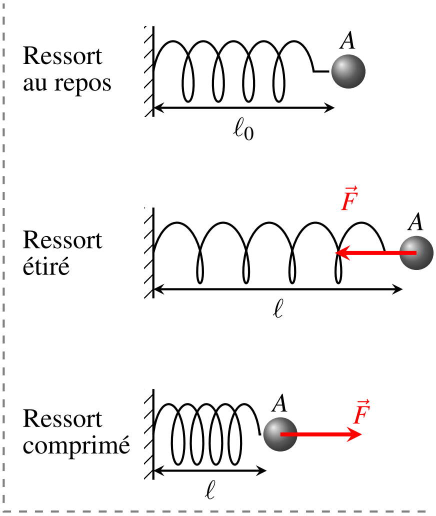
1.1 Loi de Hooke

Un ressort est un exemple parmi d'autres de système mécanique déformable. Sous certaines conditions il présente les propriétés suivantes :

• *élasticité* : lorsqu'il est déformé (compression ou extension) il tend à revenir vers son état de repos de longueur ℓ_0, appelée *longueur à vide* ;

• *linéarité* : la force que le ressort exerce au niveau d'une extrémité est proportionnelle à sa déformation $\ell - \ell_0$, appelée *allongement*.

En pratique ces conditions ne sont pas remplies si le ressort est trop comprimé (spires en contact) ou trop étiré (au-delà d'une certaine extension le ressort cesse d'être linéaire, puis il devient inélastique (déformation irréversible) et enfin il peut atteindre son point de rupture).

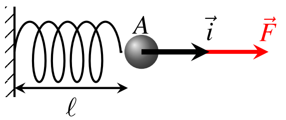


Par la suite nous supposerons toujours que les déformations des ressorts étudiés sont suffisamment faibles pour qu'ils évoluent dans leur domaine élastique et linéaire. La loi de Hooke traduit en termes mathématiques la relation de proportionnalité entre la déformation d'un ressort et la force qu'il exerce au niveau d'une extrémité, dans le domaine élastique et linéaire.

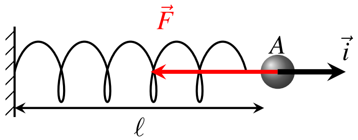
Loi de Hooke

Un ressort qui subit de petites déformations exerce au niveau d'une de ses extrémités une *force de rappel* de la forme : $\boxed{\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}}$, avec :

- ℓ la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. L'allongement $\ell - \ell_0$ mesure la déformation du ressort par rapport à son état de repos. Si $\ell < \ell_0$ le ressort est *comprimé*, si $\ell > \ell_0$ le ressort est *étiré* ;
- $\vec{i}$ un vecteur unitaire tangent au ressort et **orienté vers l'extérieur du ressort ;**
- k un paramètre appelé **raideur** du ressort (en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$). Plus la raideur est élevée et plus le ressort est difficile à déformer.



Ressort comprimé : $\ell - \ell_0 < 0$



Ressort étiré : $\ell - \ell_0 > 0$

Il est important de retenir que les paramètres k et ℓ_0 sont des **constantes** caractéristiques du ressort, tandis que la longueur ℓ est **variable** et traduit l'état du ressort à un instant donné.

1.2 Équilibre et oscillations d'un système {masse + ressort}

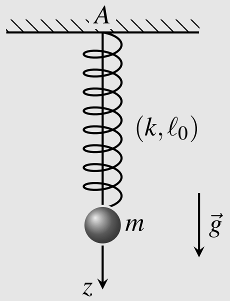
En résumé

Dans un exercice on vous demandera généralement d'étudier les oscillations d'une masse attachée à un (ou plusieurs) ressort(s), autour de sa position d'équilibre. Dans un premier temps il faudra déterminer la position d'équilibre, puis établir et résoudre l'équation du mouvement de la masse autour de cette position d'équilibre.

- Appliquer le PFS pour déterminer la longueur du (des) ressort(s) à l'équilibre ;
- Appliquer le PFD pour établir l'équation du mouvement de la masse ;
  - l'un des points clés consiste à exprimer la longueur du (des) ressort(s) en fonction de la coordonnée de position de la masse ;
  - si l'origine du repère d'étude est choisi au niveau de la position d'équilibre alors l'équation du mouvement est **homogène** (sans second membre).
- Écrire l'équation sous forme canonique et identifier la pulsation propre ω_0 ;
- Résoudre l'équation en exploitant les conditions initiales sur la position et la vitesse.

Exemple

Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est suspendu au plafond par l'une de ses extrémités A. Une masse ponctuelle m est accrochée à l'autre extrémité et peut osciller verticalement sans frottement. On note z l'altitude de la masse, mesurée par rapport à sa position d'équilibre.



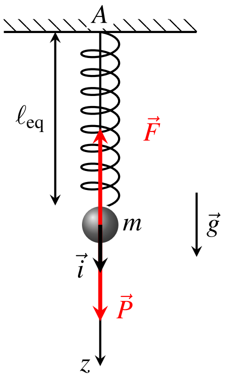
1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort lorsqu'il est en équilibre en fonction de ℓ_0, m, k et g, accélération de la pesanteur.

À l'instant $t = 0$ on comprime légèrement le ressort sur une distance a par rapport à sa longueur à l'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

3. Déterminer l'expression de $z(t)$. Exprimer la vitesse maximale de la masse.

► Mettre en œuvre le PFS



1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$. On applique le principe fondamental de la statique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$.

Ici le vecteur unitaire qui oriente la force de rappel est $\vec{i} = +\vec{u}_z$ (il est descendant car il s'éloigne du ressort) donc la projection de la force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z$.

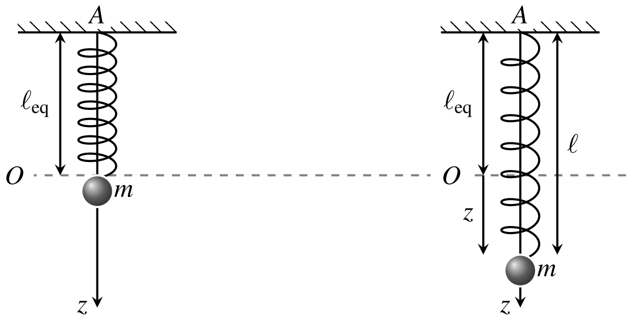
La projection du PFS sur $\vec{u}_z$ conduit à :

$$mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

► Mettre en œuvre le PFD, relier la longueur du ressort à la position de la masse

2. On étudie désormais le mouvement de la masse autour de sa position d'équilibre. On suppose que la masse est dans une position z quelconque et on note ℓ la longueur du ressort correspondante. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$.

L'objectif consiste à déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $z(t)$ de la masse. La force de rappel dépend de z par l'intermédiaire de la longueur ℓ du ressort. Pour arriver à nos fins il est indispensable d'expliciter la relation entre ℓ et z (voir l'encadré "en résumé" plus haut). Pour cela un schéma clair est plus que conseillé (voir haut de la page suivante). D'après l'énoncé l'origine du repère est située au niveau de la position d'équilibre, on en déduit que $\boxed{\ell = \ell_{\text{eq}} + z}$.



Ressort en équilibre — Ressort dans un état quelconque

On projette le PFD sur $\vec{u}_z$: $m\ddot{z} = mg - k(\ell_{eq} + z - \ell_0)$. En remplaçant ℓ_{eq} par son expression obtenue à la question précédente on obtient $\boxed{m\ddot{z} + kz = 0}$.

<u>Remarque</u> : Comme on l'a évoqué dans l'encadré "en résumé", l'équation du mouvement obtenue est homogène et c'était attendu car l'origine du repère est située au niveau de la position d'équilibre de la masse.

► **Résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique**

Équation canonique associée à un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système physique caractérisé par une grandeur $y(t)$ dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle du type :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = b$$

avec b une fonction quelconque du temps. Dans ce chapitre on traitera uniquement le cas où b est une fonction **constante**. On notera par la suite $b(t) = b_0 \ \forall t > 0$.

Le terme ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps. On l'appelle **pulsation propre** du système (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$).

<u>Remarque</u> : Retenez que la forme canonique se caractérise par le fait que le coefficient en facteur de la dérivée seconde $\ddot{y}$ est égal à 1.

Solution générale de l'équation différentielle

Dans le cas où le second membre est constant : $\ddot{y} + \omega_0^2 y = b_0$, la solution générale de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_p}$$

avec A et B deux constantes d'intégration et y_p la solution particulière qui est **la solution de l'équation sans dérivée** ($\omega_0^2 y_p = b_0$).

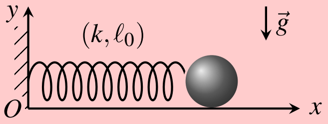
3. On écrit l'équation sous forme canonique : $\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$. On identifie la pulsation propre du système {masse + ressort} : $\omega_0=\sqrt{k/m}$. Il n'y a pas de solution particulière car l'équation est homogène. La solution générale s'écrit sous la forme : $z(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$. On détermine les constantes d'intégration avec les conditions initiales $z(0)=-a$ (le ressort est initialement comprimé donc $z<0$) et $\dot{z}(0)=0$ (masse lâchée sans vitesse initiale) :

$$\begin{cases} z(0)=-a=A \\ \dot{z}(0)=0=B\omega_0 \end{cases} \implies \boxed{z(t)=-a\cos(\omega_0 t)}$$

On connaît la position $z(t)$ à tout instant $t\geq 0$; on dérive pour avoir la vitesse de la masse : $\dot{z}(t)=a\omega_0\sin(\omega_0 t)$. Le sinus oscille entre ± 1 donc $\dot{z}$ oscille entre $\pm a\omega_0$. La vitesse maximale de la masse est : $\boxed{v_{\max}=a\omega_0}$.

Application 1

Une masse ponctuelle m est attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Elle peut glisser sans frottement sur un support horizontal. L'autre extrémité du ressort est attachée à une paroi fixe.



On utilise un repère (Oxy) dont l'origine est au niveau de la paroi. À l'instant $t=0$ le ressort est dans son état de repos et on lance la masse dans le sens positif avec une vitesse v_0.

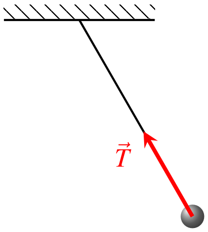
1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$. Identifier la pulsation propre.

2. Exprimer $x(t)$ pour $t\geq 0$. Déterminer la déformation maximale du ressort.

2 Pendule simple

2.1 Tension d'un fil

Un fil, comme un ressort, est un objet qui garde une certaine cohésion (il ne se casse pas) même si l'on exerce sur lui une action mécanique modérée. La cohésion d'un fil est assurée par des forces internes que l'on appelle *forces de tension*. Par extension si l'on attache une masse à l'extrémité d'un fil la cohésion entre ces deux objets peut être modélisée par une force de tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur la masse.



On dit qu'un fil est *tendu* lorsqu'on tire dessus. Dans ce chapitre nous ferons toujours l'hypothèse que les fils tendus ont une masse négligeable et sont **inextensibles** (leur longueur ℓ est constante, quelque soit la force avec laquelle on tire dessus). On admet qu'un fil tendu sans masse est rectiligne tant qu'il ne s'appuie pas sur une surface courbe.

Tension d'un fil

On adopte le modèle suivant pour décrire la force de tension exercée par un fil sur une masse attachée à son extrémité :

- la tension $\vec{T}$ est tangente au fil au niveau du point d'attache ;
- elle est **toujours attractive** et jamais répulsive ;
- il n'y a pas d'expression générale pour calculer la tension en norme ; sa valeur dépend du mouvement de la masse ainsi que des autres forces qui s'exercent sur elle ;
- la tension est nulle si le fil est détendu.

2.2 Oscillations d'un pendule simple

Un pendule est un objet qui peut osciller sous l'effet de son propre poids. Dans ce chapitre on étudie le modèle de pendule le plus élémentaire, appelé *pendule simple*.

Pendule simple

Un pendule simple est un système constitué d'un fil **inextensible** et **sans masse** de longueur ℓ, à l'extrémité duquel on attache un **point matériel** de masse m.

On se place dans le cas particulier où l'autre extrémité du fil est fixe dans le référentiel d'étude galiléen. Comme la longueur du fil est constante le mouvement de la masse ponctuelle est **circulaire**. On cherche l'équation différentielle qui caractérise le mouvement d'oscillation.

En résumé

• Se placer dans un repère **polaire**. Si ce n'est pas déjà indiqué dans l'énoncé faire un schéma du pendule et indiquer clairement la position angulaire θ et la base d'étude $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ choisie ;

• Mémoriser (ou savoir retrouver rapidement) **sans faute** l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point en mouvement circulaire non-uniforme de rayon ℓ, en coordonnées polaires : $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

• Appliquer le PFD à la masse ;

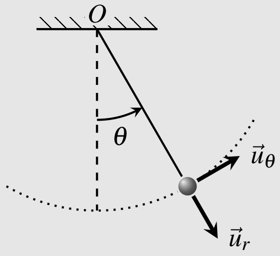
- la projection sur $\vec{u}_\theta$ permet d'accéder à l'équation du mouvement.
- la projection sur $\vec{u}_r$ permet de déterminer la tension en norme $\|\vec{T}\|$ en fonction de la position angulaire θ et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Cette équation n'est pas directement exploitable pour calculer $\theta(t)$ car $\|\vec{T}\|$ est *a priori* inconnue.

• L'équation du mouvement général d'un pendule simple est **non-linéaire**, on ne sait pas la résoudre en l'état. On suppose généralement que les oscillations sont de faible amplitude et dans ce cas l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ permet de montrer que les petites oscillations d'un pendule simple sont **harmoniques**. Identifier la pulsation propre après avoir simplifié l'équation du mouvement dans l'approximation linéaire (on dit qu'on *linéarise* l'équation quand on approche $\sin\theta$ par θ).

• Résoudre l'équation en exploitant les conditions initiales sur la position angulaire et la vitesse angulaire.

Exemple

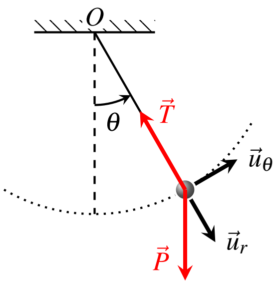
On accroche une masse ponctuelle $m = 120\,\mathrm{g}$ à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur $\ell = 80\,\mathrm{cm}$. L'autre extrémité est fixée à un point d'attache O immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. À l'instant initial $t = 0$ on tend le fil dans la direction θ_0 par rapport à la verticale et on lâche la masse sans vitesse initiale. On note $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur. On néglige tout frottement.



1. Déterminer la position angulaire $\theta(t)$ de la masse pour $t \geq 0$ en supposant que les oscillations sont de petite amplitude.

2. Calculer la période des oscillations.

▶ Mettre en œuvre le PFD



1. En l'absence de frottements la masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$. On projette dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\left|\begin{array}{c} -m\ell\dot{\theta}^2 \\ m\ell\ddot{\theta} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{array}\right. + \left|\begin{array}{c} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - \|\vec{T}\| & (E_r) \\ \ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta & (E_\theta) \end{cases}$$

L'équation du mouvement du pendule est donnée par (E_θ). On la simplifie dans l'approximation des petits angles ($\sin\theta \simeq \theta$) :

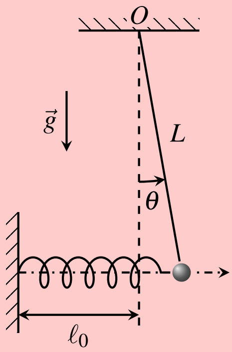
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. La solution générale s'écrit $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. On détermine les constantes d'intégration avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (masse lâchée sans vitesse initiale). On obtient : $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$.

2. La période des oscillations vaut : $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 1{,}8\,\mathrm{s}}$.

Application 2

Une masse ponctuelle m est attachée à un fil inextensible sans masse de longueur L ainsi qu'à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Le déplacement de la masse est suffisamment faible pour considérer que le ressort reste horizontal à tout instant et que les approximations suivantes sont valables : $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$. Le ressort n'est pas déformé lorsque $\theta = 0$.



1. Exprimer l'allongement $\ell - \ell_0$ du ressort en fonction de L et θ.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
En déduire l'expression de la période des petites oscillations du pendule.

3 Manipuler une fonction sinusoïdale

3.1 Lien entre expression mathématique et graphe

Fonction sinusoïdale du temps

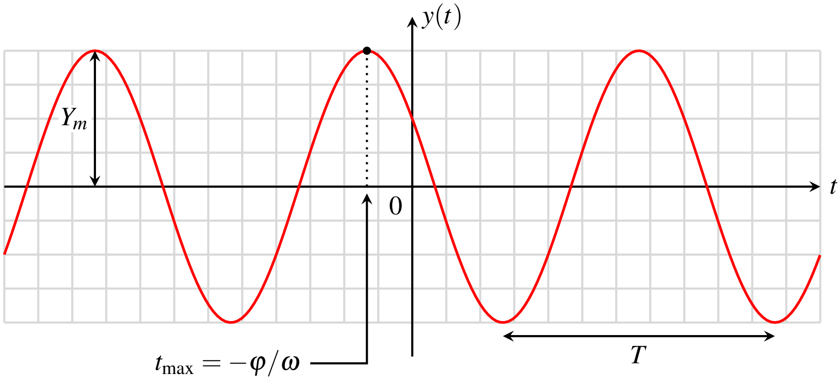
L'expression générale d'une fonction sinusoïdale du temps est :

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

- Y_m **l'amplitude** de $y(t)$,
- ω **la pulsation** (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$),
- φ **la phase à l'origine** (en rad).

• L'amplitude Y_m correspond à la moitié de l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale : $Y_m = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$ (voir figure en haut de la page suivante) ;



• La pulsation ω est reliée à la période T et à la fréquence f par les relations suivantes :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

• La phase à l'origine φ se calcule en mesurant **la date la plus proche de** $t = 0$ **pour laquelle** $y(t)$ **est maximale** (notée $t_{\max}$ sur le graphe ci-dessus) : $\varphi = -\omega t_{\max}$. En pratique on vous demandera rarement de mesurer une phase à l'origine mais retenez qu'une modification de φ revient à faire varier $t_{\max}$ donc à translater le graphe de $y(t)$ le long de l'axe des abscisses.

En utilisant des relations de trigonométrie on montre qu'une fonction sinusoïdale peut en fait s'écrire de manière équivalente sous l'une de ces trois formes :

$$y(t) = \begin{cases} Y_m \cos(\omega t + \varphi) & \\ Y_m \sin(\omega t + \psi) & \text{avec } \psi = \varphi - \pi/2 \\ A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) & \text{avec } A = Y_m \cos\varphi \text{ et } B = -Y_m \sin\varphi \end{cases}$$

Réciproquement si une fonction sinusoïdale s'écrit $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ alors l'amplitude des oscillations vaut : $\boxed{Y_m = \sqrt{A^2 + B^2}}$.

3.2 Oscillations libres d'un OH (oscillateur harmonique)

On dit qu'un système évolue librement si, après avoir reçu une perturbation initiale, il est abandonné à lui-même sans action extérieure (exemple : pendule qu'on lâche après l'avoir écarté de sa position d'équilibre). Les oscillations libres d'un OH s'effectuent à la **pulsation propre** ω_0 fixée par les paramètres du système, par exemple :

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ pour un système {masse + ressort},
- $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ pour un pendule simple.

La période des oscillations libres d'un OH est appelée **période propre** : $T_0 = 2\pi/\omega_0$. On verra dans un prochain chapitre que l'on peut obliger un système à osciller à une pulsation différente de ω_0, on parle alors *d'oscillations forcées*.

3.3 Déphasage entre deux signaux synchrones

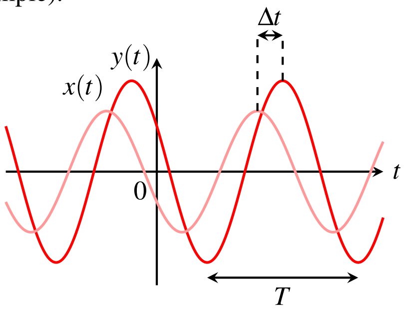
Signaux synchrones, écart temporel, déphasage

Deux fonctions sinusoïdales du temps $x(t)$ et $y(t)$ sont synchrones si elles ont la même pulsation (donc la même période). Elle n'ont pas forcément la même amplitude ni la même phase à l'origine. Il peut même s'agir de deux grandeurs physiques de nature différente (une tension et une intensité par exemple).

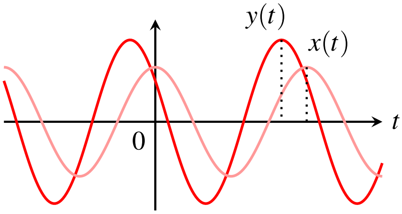
On appelle écart temporel Δt le plus petit intervalle de temps entre deux maxima (ou minima) de $x(t)$ et $y(t)$.

On appelle déphasage la mesure de l'écart angulaire entre les deux signaux. Il est défini par la relation suivante :

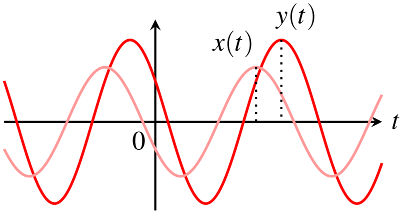
$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$



On dit que $y(t)$ est en avance sur $x(t)$ si, sur l'intervalle Δt, le maximum de $y(t)$ précède celui $x(t)$. Inversement on dit que $y(t)$ est en retard sur $x(t)$ si, sur l'intervalle Δt, le maximum de $x(t)$ précède celui de $y(t)$.



$y(t)$ en avance sur $x(t)$



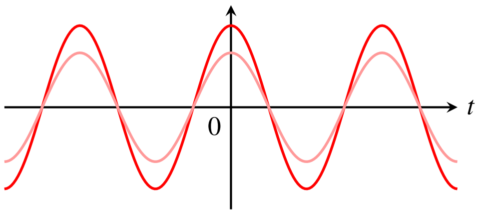
$y(t)$ en retard sur $x(t)$

Phase, quadrature de phase, opposition de phase

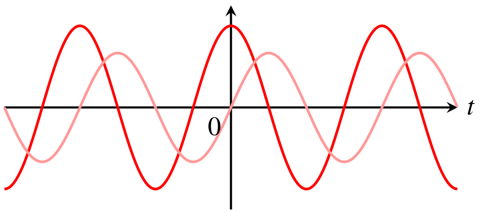
Deux signaux synchrones $x(t)$ et $y(t)$ sont :

- **en phase** s'il n'y a pas de décalage entre les signaux : $\Delta t = 0 \iff \Delta\varphi = 0$. Les maxima de $x(t)$ et $y(t)$ se produisent aux mêmes dates.
- **en quadrature de phase** si les signaux sont décalés d'un quart d'oscillation : $\Delta t = T/4 \iff \Delta\varphi = \pi/2$. Un maximum de $x(t)$ correspond à une annulation de $y(t)$, et vice-versa.
- **en opposition de phase** si les signaux sont décalés d'une demi-oscillation : $\Delta t = T/2 \iff \Delta\varphi = \pi$. Un maximum de $x(t)$ correspond à un minimum de $y(t)$, et vice-versa.

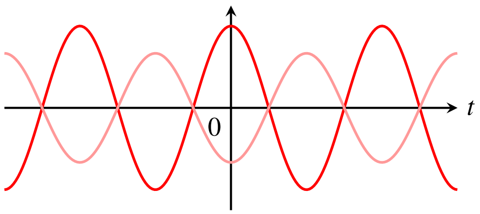
Signaux en phase



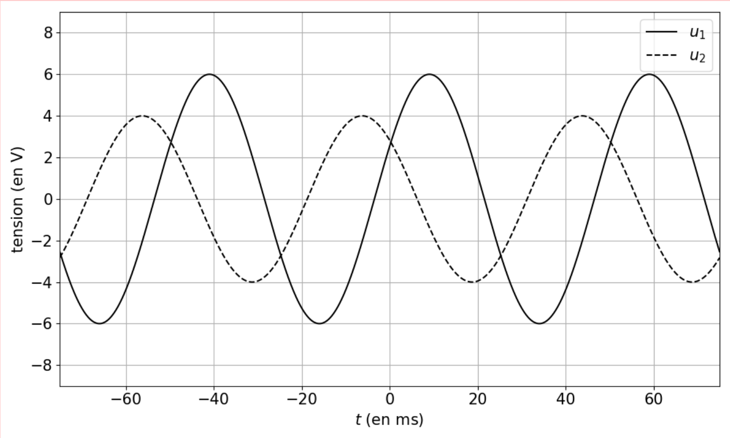
Signaux en quadrature de phase



Signaux en opposition de phase



Application 3



Le graphique ci-dessus représente l'évolution temporelle de deux tensions alternatives. Déterminer l'amplitude et la fréquence de chaque signal puis le déphasage entre les deux. Lequel est en avance sur l'autre ?