CHAPITRE 10 Énergétique

Dans le domaine de la mécanique, les raisonnements énergétiques constituent une approche alternative et complémentaire au principe fondamental de la dynamique ou au théorème du moment cinétique (voir chapitre 18). Ils permettent d'accéder à certaines propriétés du mouvement de manière rapide et efficace, en particulier quand il n'y a pas de frottements.

1 Théorème de l'énergie cinétique

1.1 Puissance et travail d'une force

Puissance d'une force

Un point matériel en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ est soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de cette force est définie par : $\boxed{\mathscr{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}}$, elle s'exprime en watt (W).

Le signe de la puissance dépend si la force $\vec{F}$ entraîne la masse dans son mouvement et la fait accélérer ou s'oppose au mouvement et la fait ralentir :

- Une force est *motrice* si elle tend à **accélérer** la masse : $\mathscr{P}(\vec{F}) > 0$.
- Une force est *résistante* si elle tend à la **ralentir** la masse : $\mathscr{P}(\vec{F}) < 0$.
- Une force orthogonale au mouvement ne tend ni à accélérer ni à ralentir la masse : $\vec{F} \perp \vec{v} \implies \mathscr{P}(\vec{F}) = 0$.

Prenons l'exemple d'un solide qui glisse avec frottements sur un plan incliné. S'il est lancé vers le haut (voir ci-dessous, à gauche) le poids $\vec{P}$ est résistant, il tend à faire ralentir le solide. À l'inverse s'il glisse vers le bas (ci-dessous, à droite) $\vec{P}$ est moteur et tend à le faire accélérer. La réaction normale du plan est toujours orthogonale au mouvement, sa puissance est nulle. La réaction tangentielle s'oppose toujours au mouvement, elle est résistante.

$\mathscr{P}(\vec{P}) < 0$; $\mathscr{P}(\vec{N}) = 0$; $\mathscr{P}(\vec{T}) < 0$ $\qquad$ $\mathscr{P}(\vec{P}) > 0$; $\mathscr{P}(\vec{N}) = 0$; $\mathscr{P}(\vec{T}) < 0$

> Pour un système assimilé à un point matériel, une force de frottement (fluide ou solide) est **toujours résistante** car elle s'oppose au mouvement.

Travail d'une force entre deux points d'une trajectoire

Une masse ponctuelle se déplace sur une trajectoire $(\mathscr{C})$, d'un point A vers un point B. Il est soumis à une force $\vec{F}$ tout au long de son déplacement. Le travail de $\vec{F}$ entre A et B est défini par :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A,(\mathscr{C})}^{B} \mathscr{P}\mathrm{d}t = \int_{A,(\mathscr{C})}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

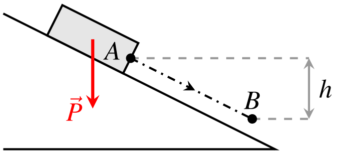
avec $\mathrm{d}\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire de la masse entre t et $t+\mathrm{d}t$. Un travail s'exprime en joule (J).

1.1.1 Travail du poids

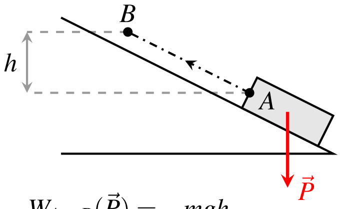
Le travail du poids s'écrit :

$$\boxed{W_{A\to B} = \pm mgh}$$

avec h le dénivelé entre A et B. Le travail est positif si la masse **tombe** (poids moteur) et négatif si la masse **monte** (poids résistant).



$W_{A\to B}(\vec{P}) = mgh$



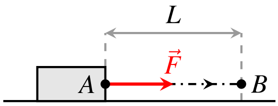
$W_{A\to B}(\vec{P}) = -mgh$

1.1.2 Mouvement rectiligne : travail d'une force constante colinéaire au mouvement

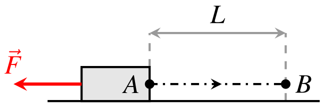
Le travail d'une force constante $\vec{F}$ qui s'applique à une masse en mouvement rectiligne vaut :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \pm FL}$$

avec $F = \|\vec{F}\|$ et $L = AB$ la distance parcourue par la masse. Le travail est positif si $\vec{F}$ est motrice (dans le sens de $\vec{v}$) et négatif si $\vec{F}$ est résistante (en sens contraire de $\vec{v}$).



$W_{A\to B}(\vec{F}) = FL$



$W_{A\to B}(\vec{F}) = -FL$

1.1.3 Force orthogonale au mouvement

Le travail d'une force orthogonale au mouvement est nul : $\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = 0}$. C'est par exemple le cas de la réaction normale d'un support rigide ou bien de la tension d'un fil inextensible.

1.2 Théorème de la puissance cinétique, théorème de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à différentes forces vérifie à tout instant :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{F})$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen l'énergie cinétique d'un point matériel en mouvement d'un point A vers un point B, soumis à différentes forces, vérifie :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{A\to B}(\vec{F})$$

Quand on applique le théorème de l'énergie cinétique il est primordial d'expliciter clairement le point de départ et le point d'arrivée. Il faut également s'assurer que le référentiel d'étude est galiléen.

1.3 Mise en œuvre pratique du TEC

En résumé

• Préciser le système, le référentiel et le repère d'étude ;

• Faire le bilan des forces ;

• Énoncer le TEC en explicitant le point de départ et le point d'arrivée choisi. Exprimer les vitesses initiale et la vitesse finale en fonction des données et écrire ΔE_c ;

• Calculer les différents travaux ;

• Conclure en fonction du contexte (par exemple calculer la vitesse dans une position donnée ou bien trouver la position pour laquelle la vitesse s'annule).

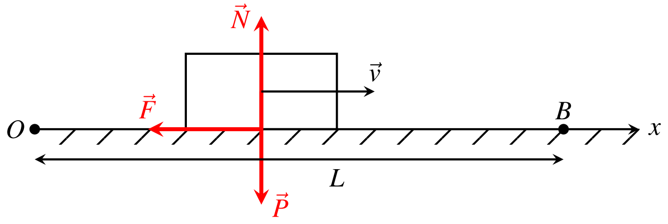
Exemple

Un véhicule assimilé à un point matériel de masse m se déplace en ligne droite sur une route horizontale à la vitesse constante v_0. À un instant donné le conducteur aperçoit un danger et freine brutalement. On modélise le freinage par l'action d'une force constante $\vec{F}$ opposée au déplacement du véhicule.

Déterminer la distance de freinage en fonction de m, v_0 et $F = \left\|\vec{F}\right\|$.

► **Référentiel + repère + schéma**

Comme d'habitude on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on choisit comme repère un axe (Ox) orienté dans le sens de déplacement du véhicule (voir figure ci-dessous). On place l'origine à l'endroit où le freinage commence.



► **Bilan des forces + TEC**

Le véhicule est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale du sol $\vec{N}$ et à la force de freinage $\vec{F}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique au véhicule, entre le point O où le freinage commence (vitesse v_0) et le point B où le véhicule s'arrête (vitesse nulle).

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{O\to B}(\vec{P}) + W_{O\to B}(\vec{N}) + W_{O\to B}(\vec{F})$$

► **Calculer les travaux**

Le poids et la réaction normale sont à tout instant orthogonales au déplacement du véhicule : $W_{O\to B}(\vec{P}) + W_{O\to B}(\vec{N}) = 0$.

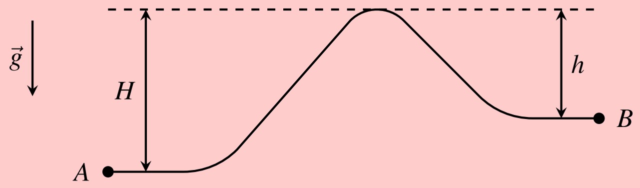
La force de freinage est constante et s'oppose au mouvement du véhicule. Si l'on note L la distance de freinage, c'est-à-dire la distance OB, alors $W_{O\to B}(\vec{F}) = -FL$.

► **Retour au TEC et conclusion**

On conclut en isolant la distance de freinage : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -FL \iff \boxed{L = \frac{mv_0^2}{2F}}$.

Application 1

Un anneau de masse m est enfilé sur un rail sur lequel il glisse sans frottement. il est lancé depuis le point A, en direction de B, avec une vitesse v_0. Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à l'anneau de franchir la bosse ? Exprimer sa vitesse lorsqu'il arrive en B en fonction de v_0, H, h et l'accélération de la pesanteur g.



1.4 Mise en œuvre pratique du TPC

En règle générale le théorème de la puissance cinétique est utilisé pour obtenir une équation différentielle vérifiée par la vitesse du point matériel.

Exemple

Un véhicule assimilé à un point matériel de masse m se déplace en ligne droite sur une route horizontale. On repère sa position avec un axe (Ox). À l'instant $t = 0$ le véhicule se trouve en $x = 0$ avec la vitesse v_0 et il commence un phase de freinage modélisée par une action mécanique de puissance constante $-\mathscr{P}_f$ (avec $\mathscr{P}_f > 0$).

1. Déterminer la vitesse $v(t)$ du véhicule et exprimer la durée t_f du freinage.

2. Déterminer la vitesse $v(x)$ du véhicule et exprimer la distance L_f de freinage.

► **Bilan des forces + TPC**

1. Le véhicule est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ de la route et à la force de freinage de puissance $-\mathscr{P}_f$. On applique le théorème de la puissance cinétique au véhicule dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec{P}) + \mathscr{P}(\vec{N}) - \mathscr{P}_f$.

► **Calculer les puissances → équation différentielle**

Comme la route est horizontale le poids et la réaction normale sont perpendiculaires au mouvement donc $\mathscr{P}(\vec{P}) = \mathscr{P}(\vec{N}) = 0$. On conclut que : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\mathscr{P}_f$. On intègre cette équation différentielle sachant que la puissance $-\mathscr{P}_f$ est constante : $\frac{1}{2}mv^2 = -\mathscr{P}_f t + C$. La condition initiale $v(0) = v_0$ permet de calculer la constante d'intégration et de conclure :

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\mathscr{P}_f t + \frac{1}{2}mv_0^2 \iff \boxed{v(t) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mathscr{P}_f}{m}t}}$$

Le freinage s'arrête à la date t_f pour laquelle la vitesse s'annule. On trouve $\boxed{t_f = \dfrac{mv_0^2}{2\mathscr{P}_f}}$.

► **Changer de variable → passer de** $v(t)$ **à** $v(x)$

On reprend le TPC et on développe la dérivée : $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{P}_f$. On effectue le changement de variable avec l'astuce suivante (classique!) :

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3}mv^3\right) = -\mathscr{P}_f$$

On intègre cette équation différentielle **par rapport à** x : $\frac{1}{3}mv^3(x) = -\mathscr{P}_f x + C$. La condition "initiale" $v(x=0) = v_0$ permet de calculer la constante d'intégration et de conclure :

$$\frac{1}{3}mv^3 = -\mathscr{P}_f x + \frac{1}{3}mv_0^3 \iff \boxed{v(x) = \left(v_0^3 - \frac{3\mathscr{P}_f}{m}x\right)^{1/3}}$$

On cherche la position $x = L_f$ pour laquelle la vitesse s'annule. On trouve $\boxed{L_f = \dfrac{mv_0^3}{3\mathscr{P}_f}}$.

Aplication 2

Une voiture assimilée à un point matériel de masse m roule en ligne droite sur une route horizontale. Le moteur développe une puissance constante $\mathscr{P}$. On néglige les frottements entre les pneumatiques et la route. Les frottements de l'air sont modélisés par une force de traînée $\vec{F}_T = -\frac{1}{2}\rho_0 S C_x v\vec{v}$ avec ρ_0 la masse volumique de l'air, $v = \left\|\vec{v}\right\|$ la vitesse du véhicule par rapport à l'air supposé au repos dans le référentiel terrestre, S la section du véhicule projetée perpendiculairement au mouvement et C_x le coefficient aérodynamique de traînée. Pour les applications numériques on prendra $m = 1\,300\,\mathrm{kg}$, $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $C_x = 0{,}33$, $S = 2{,}5\,\mathrm{m^2}$ et $\mathscr{P} = 62{,}5\,\mathrm{kW}$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

2. Après une phase transitoire d'accélération le mouvement de la voiture devient rectiligne uniforme. Déterminer numériquement la vitesse maximale atteinte, en km/h.

3. Sur route ou autoroute, à vitesse stabilisée, la consommation en carburant, exprimée en litres pour 100 km parcourus, augmente en V^x. Déterminer l'exposant x. La consommation en carburant est supposée proportionnelle à l'énergie fournie par le moteur pour parcourir le trajet.

4. Reprendre les questions 1 et 2 dans le cas où la voiture monte une côte (toujours en ligne droite) de pente 5% (cela correspond à une route inclinée d'environ 3° par rapport à l'horizontale). On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et on utilisera la calculatrice pour résoudre numériquement l'équation vérifiée par la vitesse maximale.

2 Calculer une énergie potentielle

Nous allons voir dans cette partie que les forces qui agissent sur un système peuvent être classées en deux catégories : forces conservatives ou non conservatives. Les premières jouent un rôle particulier dans l'étude du mouvement ; on peut leur associer une *énergie potentielle* $E_p(\vec{r})$ qui est une fonction de la position du système dans l'espace. Dans un premier temps l'objectif est de comprendre comment déterminer l'expression mathématique de l'énergie potentielle associée à une force conservative.

2.1 Force conservative et non conservative

Force conservative, force con conservative

Une force est conservative si et seulement si **elle dépend uniquement de la position du système**. C'est par exemple le cas de la force de rappel d'un ressort, mais aussi du poids (qui est un cas particulier car il ne dépend même pas de la position).

Toute force qui dépend d'autres paramètres que la position (vitesse, accélération, autres forces qui agissent sur le système) est dite non conservative. C'est le cas des forces de frottement (fluide ou solide), de la tension d'un fil ou de la réaction normale d'un support.

2.2 Énergie potentielle d'une force conservative

Énergie potentielle d'une force conservative

À toute force conservative $\vec{F}$ on peut associer une fonction de la position, appelée *énergie potentielle E_p*, définie par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ un vecteur appelé "gradient d'énergie potentielle".

À ce stade il n'est pas nécessaire de connaître la définition du gradient en tant qu'objet mathématique. En cas de besoin l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ projeté dans la base d'étude sera toujours fournie. Cette année on se placera exclusivement dans le cas où les forces conservatives dépendent d'une seule coordonnée d'espace.

On retient pour l'instant qu'un gradient s'écrit à l'aide d'une dérivée par rapport à une coordonnée d'espace (voir exemple ci-dessous). Une force se calcule en **dérivant** l'énergie potentielle par rapport à une coordonnées d'espace. Réciproquement une énergie potentielle se calcule en **intégrant** une force par rapport à une coordonnée d'espace.

Exemple

Une masse ponctuelle m est en mouvement dans le champ de pesanteur terrestre. On utilise un repère cartésien $(Oxyz)$ avec l'axe (Oz) vertical ascendant et on cherche l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur. On admet que dans ce cas de figure $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z$.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(z)$, en supposant arbitrairement qu'elle est nulle en $z = 0$.

2. Quelle différence y a-t-il si l'axe (Oz) est vertical descendant ?

► **Projeter → équation différentielle vérifiée par E_p → intégrer pour obtenir E_p**

1. Avec un axe (Oz) vertical ascendant le poids s'écrit $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$. On projette $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ sur $\vec{u}_z$: $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg$. On intègre sachant que m et g sont constantes : $E_p = mgz + K$. On choisit l'énergie potentielle nulle en $z = 0$ donc $K = 0$: $\boxed{E_p(z) = mgz}$.

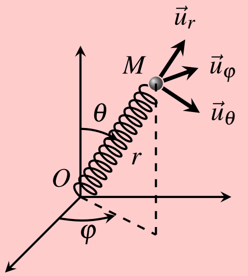
2. Dans le cas où l'axe (Oz) est descendant le poids s'écrit $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ donc $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -mg$. Au final on trouve $\boxed{E_p(z) = -mgz}$.

⚠ Soyez vigilants à l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, elle dépend du sens de l'axe vertical !

> Le calcul d'une énergie potentielle fait toujours apparaître une constante d'intégration. On dit que l'énergie potentielle est définie *à une constante près*. En pratique les propriétés du mouvement ne dépendent pas de la valeur d'une énergie potentielle mais des différences entre les énergies potentielles en différents points de l'espace, la valeur de la constante d'intégration n'a donc aucune importance. On peut donc la choisir arbitrairement ou, ce qui revient au même, on peut choisir arbitrairement la position pour laquelle l'énergie potentielle est nulle. Cette propriété de l'énergie potentielle est semblable à ce que l'on a vu en électricité pour le **potentiel électrique**. Ce n'est pas un hasard, nous verrons au prochain chapitre que le potentiel électrique est défini à l'aide d'une énergie potentielle !

Application 3

Une masse ponctuelle est accrochée à un ressort élastique de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Elle peut se déplacer librement dans l'espace tandis que l'autre extrémité est fixée au point O. On utilise le repère sphérique représenté sur la figure ci-contre.



1. Donner l'expression de la force de rappel du ressort dans la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.
2. Pour une force qui ne dépend que de la coordonnée r on admet que $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique. On la choisit nulle quand le ressort est non déformé.

Maintenant vous savez calculer une énergie potentielle. Dans un exercice utilisant l'énergie potentielle de pesanteur ou l'énergie potentielle élastique on vous demandera rarement de redémontrer leur expression, il faut absolument les mémoriser :

$$\boxed{E_{p,\text{pes}} = \begin{cases} mgz + \text{Cste} & \text{axe } (Oz) \text{ vertical ascendant} \\ -mgz + \text{Cste} & \text{axe } (Oz) \text{ vertical decendant} \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2}k\,(\ell - \ell_0)^2 + \text{Cste}}$$

2.3 Travail d'une force conservative

Travail d'une force conservative

Le travail d'une force conservative $\vec{F}$ entre deux points d'une trajectoire est égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle entre ces deux points :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Le travail d'une force conservative entre deux points dépend uniquement des positions de départ et d'arrivée. **Il ne dépend pas du chemin suivi**. Si l'on effectue le chemin en sens inverse (de B vers A) le travail change de signe.

3 Théorème de l'énergie mécanique

3.1 Énergie mécanique

Énergie mécanique

L'énergie mécanique est définie par :

$$E = E_c + E_p$$

avec E_p l'énergie potentielle du système. S'il y a plusieurs forces conservatives leurs énergies potentielles s'additionnent.

3.2 Théorème de l'énergie mécanique, théorème de la puissance mécanique

Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel galiléen l'énergie mécanique d'un point matériel en mouvement d'un point A vers un point B, soumis à différentes forces, vérifie :

$$\Delta E = E(B) - E(A) = \sum_{\text{non cons}} W_{A\to B}(\vec{F})$$

où la somme porte uniquement sur les forces **non conservatives**.

Le théorème de l'énergie mécanique est une simple reformulation du théorème de l'énergie cinétique obtenue en séparant, dans la somme des travaux des forces, celles qui sont conservatives et celles qui ne le sont pas :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \sum W_{A\to B}(\vec{F}) \\ &= \underbrace{\sum_{\text{cons}} W_{A\to B}(\vec{F})}_{=-\Delta E_p} + \sum_{\text{non cons}} W_{A\to B}(\vec{F}) \\ \iff \Delta(E_c + E_p) &= \sum_{\text{non cons}} W_{A\to B}(\vec{F}) \end{aligned}$$

Le TEM permet de réaliser une étude énergétique sans avoir à expliciter le travail des forces conservatives. À la place on réalise un bilan d'énergie potentielle, ce qui revient exactement au même d'après la relation écrite au paragraphe 2.3. Le TEM permet de réaliser des bilans énergétiques de manière rapide et efficace, en particulier dans les cas où l'énergie mécanique se conserve, comme on le verra dans les paragraphes suivants.

Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Dans un référentiel galiléen l'énergie mécanique d'un point matériel vérifie à tout instant :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_{\text{non cons}} \mathscr{P}(\vec{F})$$

Le TPM peut être utilisé comme une alternative au PFD pour déterminer l'équation du mouvement d'un système mécanique (voir paragraphe 3.5).

3.3 Système conservatif

Système conservatif

Un système mécanique est conservatif s'il n'est soumis à aucune force non conservative ou bien si celles-ci ne travaillent pas. Dans ce cas le TPM s'écrit $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

Pour un tel système l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

La conservation de l'énergie mécanique, traduite sous forme mathématique, offre un outil de prédiction très puissant pour étudier les propriétés du mouvement. Nous allons en voir quelques exemples.

Intégrale première du mouvement

Quand un système est conservatif on peut traduire en équation la conservation de l'énergie mécanique sous la forme suivante :

$$\underbrace{E_c}_{\text{dépend de la vitesse}} + \underbrace{E_p}_{\text{dépend de la position}} = \underbrace{\text{Cste}}_{\text{obtenue avec les CI}}$$

Une telle relation entre la vitesse et la position du système est appelée une *intégrale première du mouvement*. Ce nom vient du fait que quand on dérive une telle équation par rapport au temps on obtient une relation entre l'accélération et la position, c'est-à–dire l'équation du mouvement du système !

$$\text{intégrale } 1^{\text{ère}} \text{ du mouvement} \quad \underset{\text{intégration / } t}{\overset{\text{dérivation / } t}{\rightleftharpoons}} \quad \text{équation du mouvement}$$

Comme on l'a vu avec le TEC, une intégrale $1^{\text{ère}}$ du mouvement qui relie la vitesse d'un système à sa position permet de répondre à des questions du type "quelle est la vitesse à tel endroit de l'espace ?" ou bien "à quel endroit la vitesse s'annule-t-elle ?". Dans ce chapitre nous aborderons essentiellement des applications qui font intervenir l'énergie potentielle de pesanteur et/ou l'énergie potentielle élastique.

3.4 Mise en œuvre pratique de la conservation de l'énergie mécanique

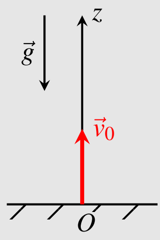
3.4.1 Obtenir une intégrale première du mouvement

En résumé

- Préciser le système, le référentiel et le repère d'étude ;
- Faire le bilan des forces, vérifier que le système est conservatif ;
- Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ;
- Exprimer la valeur constante de l'énergie mécanique en utilisant les conditions initiales ;
- Conclure en fonction du contexte (par exemple calculer la vitesse dans une position donnée ou bien trouver la position pour laquelle la vitesse s'annule).

Exemple

On lance un point matériel de masse m à la verticale depuis l'origine d'un axe (Oz) ascendant, avec une vitesse v_0. On néglige tout frottement. On note $g = \|\vec{g}\|$ l'accélération de la pesanteur.



1. Déterminer la vitesse $v(z)$ de la masse à l'altitude z.

2. Déterminer la hauteur h du lancer.

3. Déterminer la vitesse de la masse quand elle retombe en O.

► **Bilan des forces, vérifier que E se conserve**

1. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En l'absence de frottements la masse est soumise uniquement à son poids, qui est une force conservative. Il n'y a aucune force non conservative donc **l'énergie mécanique est constante**.

► **Traduire en équation la conservation de E**

L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle $E_p = mgz$ (axe (Oz) ascendant et on choisit $E_p = 0$ au point O). À l'instant initial la vitesse vaut v_0 et la position est $z = 0$ donc l'énergie mécanique vaut à tout instant : $E = \frac{1}{2}mv_0^2$.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 \iff \boxed{v(z) = \sqrt{v_0^2 - 2gz}}$$

2. On cherche l'altitude $z = h$ pour laquelle la vitesse s'annule. On trouve $\boxed{h = \dfrac{v_0^2}{2g}}$.

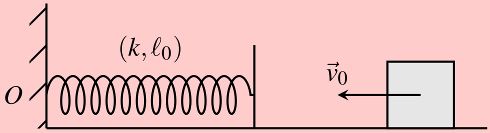
3. D'après le résultat de la question 1 la vitesse de la masse dépend uniquement de z. Si elle revient à son altitude de départ alors elle a exactement la même vitesse qu'au départ. **La masse retombe en O avec la vitesse v_0.**

Remarque : Dans le cas présent $\vec{v} = \dot{z}\vec{u}_z$ donc $v^2 = \dot{z}^2$. La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$. On dérive cette équation par rapport au temps :

$$m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 0 \iff \boxed{\dot{z}(\ddot{z} + g) = 0}$$

Si la masse est en mouvement ($\dot{z} \neq 0$) alors sa position $z(t)$ est solution de l'équation différentielle : $\ddot{z} = -g$. Il s'agit de l'équation du mouvement pour une chute libre sans frottement, comme on l'a établi avec le PFD. Cela montre que la conservation de l'énergie mécanique conduit effectivement à une intégrale première du mouvement.

Application 4



Un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 est posé sur un support plan et horizontal. Il est fixé à l'une de ses extrémités O. Une masse m arrive sur l'extrémité mobile avec une vitesse v_0. Elle glisse sans frottement sur le support.

Déterminer la longueur minimale du ressort.

3.4.2 Obtenir l'équation du mouvement

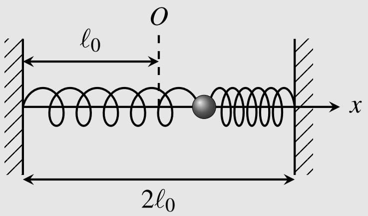
Comme on l'a vu précédemment on peut obtenir l'équation du mouvement en écrivant une intégrale première du mouvement puis en la dérivant par rapport au temps. Il est parfaitement équivalent d'utiliser le théorème de la puissance mécanique et cela permet de gagner un peu de temps.

En résumé

- Préciser le système, le référentiel et le repère d'étude ;
- Faire le bilan des forces, vérifier que le système est conservatif ;
- Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de position ;
- Exploiter le TPM ($\frac{dE}{dt} = 0$) permet d'obtenir l'équation du mouvement.

Exemple

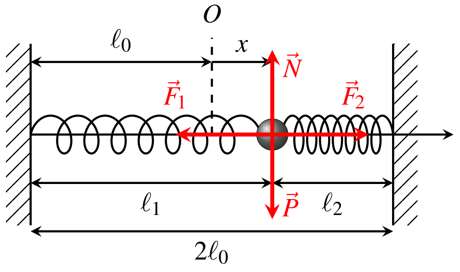
Une masse ponctuelle m est attachée à deux ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Les extrémités des deux ressorts sont accrochées à des parois fixes distantes de $2\ell_0$. La masse peut se déplacer sans frottement le long d'un axe (Ox) horizontal dont l'origine O est équidistante des deux parois.



Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en utilisant un raisonnement énergétique.

► **Bilan des forces, vérifier que E se conserve**

1. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ de l'axe et aux forces de rappel $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par les ressorts. Seule $\vec{N}$ est non conservative mais elle ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement à tout instant. **L'énergie mécanique se conserve**.



► **Exprimer l'énergie mécanique en fonction de x**

Le mouvement de la masse est horizontal donc on ne tient pas compte du poids (l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas au cours du mouvement). Les longueurs des ressorts valent $\ell_1 = \ell_0 + x$ et $\ell_2 = 2\ell_0 - \ell_1 = \ell_0 - x$. On en déduit l'expression de l'énergie potentielle totale :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2 = kx^2$$

L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. L'énergie mécanique vaut donc : $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kx^2$.

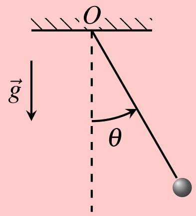
► **Appliquer le TPM**

On applique le théorème de la puissance mécanique à la masse :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{x}x \iff \dot{x}(m\ddot{x} + 2kx) = 0$$

Si la masse est en mouvement ($\dot{x} \neq 0$) alors sa position x est solution de : $\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$. On retrouve le résultat établi avec le PFD dans l'exercice 3 du chapitre 9.

Application 5



On accroche une masse ponctuelle m à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ. L'autre extrémité est fixée à un point d'attache O immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige tout frottement.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en fonction de m, $g = \|\vec{g}\|$, ℓ et θ. On la choisit nulle en $\theta = 0$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ à l'aide d'un raisonnement énergétique.

4 Énergie potentielle et mouvement conservatif à une dimension

L'énergie potentielle à elle seule permet d'obtenir un certain nombre d'informations sur la dynamique d'un système : bornes du mouvements, positions d'équilibre stables ou instables, petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Dans cette partie on étudie l'énergie potentielle comme une fonction d'une coordonnée d'espace, et on s'appuie en particulier sur sa représentation graphique. Le système étudié est conservatif ($E = \text{Cste}$) et est décrit par une seule coordonnée d'espace (par exemple x pour un mouvement rectiligne ou θ pour un mouvement circulaire).

4.1 Lecture d'un graphe d'énergie potentielle

On considère un système mécanique en mouvement rectiligne sans frottement le long d'un axe (Ox), soumis à une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$. On note E son énergie mécanique, constante. Dans une telle situation la relation force-énergie potentielle s'écrit :

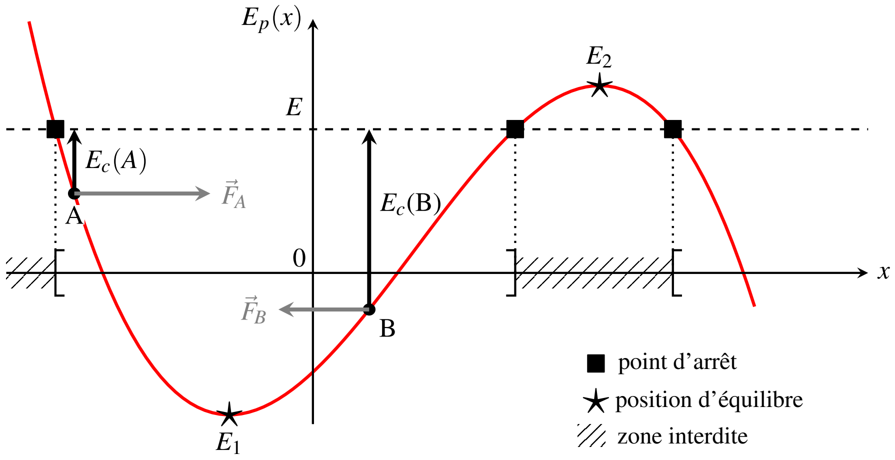
$$\vec{F} = F(x)\vec{u}_x \qquad \text{avec} \qquad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$$

On montre sur un exemple arbitraire le graphe de la fonction $E_p(x)$ d'un système mécanique, en haut de la page suivante.

Propriété 1 : Énergie mécanique et énergie cinétique

Sur un graphe d'énergie potentielle on représente l'énergie mécanique constante par un trait horizontal.

Pour une position x donnée l'énergie cinétique se mesure par l'écart entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ($E_c = E - E_p(x)$). Plus l'énergie potentielle est faible et plus l'énergie cinétique est grande, et vice-versa (voir les points A et B). Il y a des *points d'arrêt* dans les positions où $E_p(x) = E$ (la vitesse est nulle).



Propriété 2 : Bornes du mouvement

L'énergie cinétique ne peut jamais être négative donc **le système doit obligatoirement se trouver dans une position où $E_p(x) \leq E$.** Les zones qui ne respectent pas ce critère ne peuvent jamais être atteintes, elles sont appelées *zones interdites* sur le graphe. Les bornes du mouvement se situent au niveau des *points d'arrêt* (la masse s'arrête et repart en sens inverse).

Propriété 3 : Sens et intensité de la force $\vec{F}$

D'après la relation $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x$:

- la force est selon $+\vec{u}_x$ en un point où $E_p(x)$ est **décroissante** (voir point A) ;
- la force est selon $-\vec{u}_x$ en un point où $E_p(x)$ est **croissante** (voir point B) ;
- plus la pente est forte (en valeur absolue) et plus $\left\|\vec{F}\right\|$ est élevée ;
- la force est **nulle** au niveau d'un extremum d'énergie potentielle.

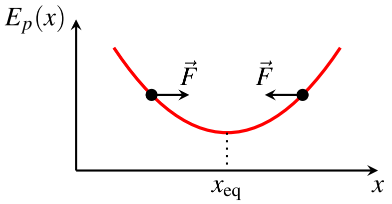
Propriété 4 : Position d'équilibre

La force est nulle au niveau d'un extremum d'énergie potentielle donc si on y place la masse sans vitesse initiale elle y demeurera au repos. **Un extremum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre du système** (points E_1 et E_2 sur le graphe). En termes mathématiques une position d'équilibre x_{eq} est caractérisée par :

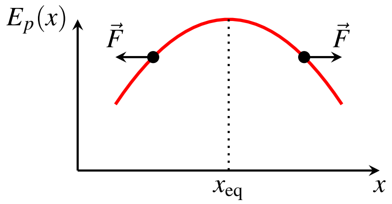
$$E_p'(x_{\text{eq}}) = 0$$

Propriété 5 : Stabilité d'une position d'équilibre

- Quand on écarte légèrement le système d'un minimum d'énergie potentielle la force tend à l'y ramener : **un minimum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable**.
- Quand on écarte légèrement le système d'un maximum d'énergie potentielle la force tend à l'en éloigner davantage : **un maximum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre instable**.



Position d'équilibre stable



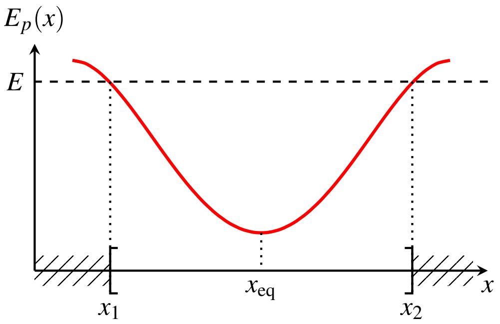
Position d'équilibre instable

En termes mathématiques :

$$\begin{cases} \text{une position d'équilibre est stable si :} & E_p'(x_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad E_p''(x_{eq}) > 0 \\ \text{une position d'équilibre est instable si :} & E_p'(x_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad E_p''(x_{eq}) < 0 \end{cases}$$

Propriété 6 : Puits de potentiel

On appelle *puits de potentiel* (c'est-à-dire puits d'énergie potentielle) une zone localisée autour d'une position d'équilibre stable. Si l'énergie mécanique est suffisamment faible le système peut être confiné à l'intérieur du puits. Dans ce cas **le mouvement est borné et le système oscille périodiquement autour de la position d'équilibre**.



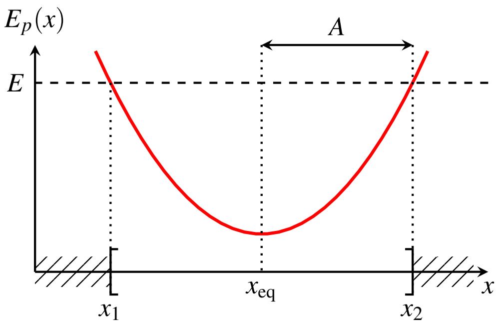
Système piégé à l'intérieur d'un puits de potentiel
Le mouvement est borné entre x_1 et x_2

Propriété 7 : Puits de potentiel harmonique

Un oscillateur harmonique de masse m, pulsation propre ω_0 et position d'équilibre $x = x_{eq}$ a une énergie potentielle **quadratique** (c'est-à-dire proportionnelle au carré de l'écart à l'équilibre) :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x - x_{eq})^2 + \text{Cste}$$

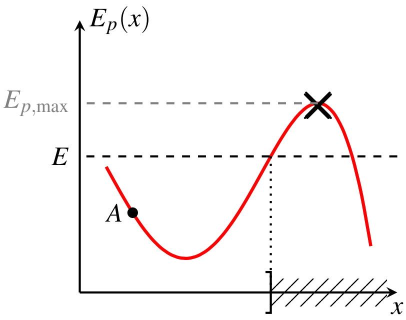
Son énergie potentielle a une forme caractéristique de **parabole** avec les branches tournées vers le haut. L'amplitude des oscillations A peut se lire sur le graphe comme la moitié de l'écart entre les positions extrêmes : $A = \frac{x_2 - x_1}{2}$.



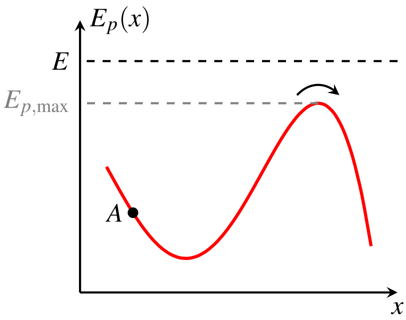
Puits de potentiel harmonique

Propriété 8 : Barrière de potentiel

On appelle *barrière de potentiel* une zone localisée autour d'une position d'équilibre instable. Pour franchir une barrière de potentiel (c'est-à-dire passer d'un côté à l'autre) le système doit avoir une énergie mécanique suffisante : $E > E_{p,\max}$.



Le système initialement en A n'a pas l'énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel



Le système initialement en A a l'énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel

4.2 Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

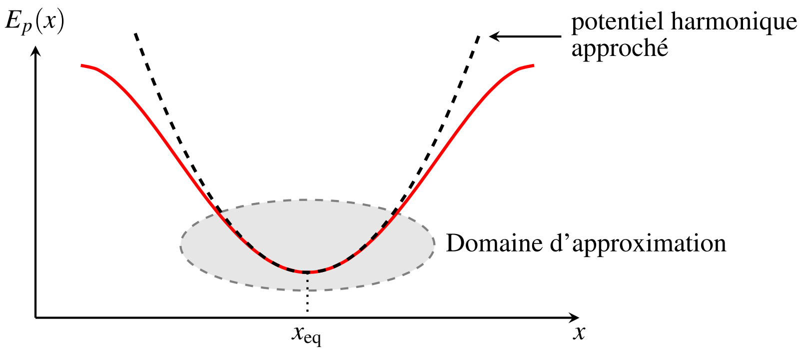
On se place dans le cas où il existe une position d'équilibre stable pour le système x_{eq} telle que : $E'(x_{\text{eq}}) = 0$ et $E''_p(x_{\text{eq}}) > 0$.

Développement de Taylor à l'ordre 2

Dans un petit intervalle autour de la position d'équilibre stable x_{eq} on peut approcher la véritable énergie potentielle $E_p(x)$ par celle d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire une énergie potentielle écrite comme un polynôme du deuxième ordre en x :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{\text{eq}}) + \frac{E''_p(x_{\text{eq}})}{2}(x - x_{\text{eq}})^2$$

On illustre l'approximation sur le graphe ci-dessous.



Approximation par un puits de potentiel harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable

Force et équation du mouvement approchée

On calcule la force dans l'approximation des mouvements de petite amplitude :

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x \simeq -E''_p(x_{\text{eq}})(x - x_{\text{eq}})$$

Cette force est analogue à celle d'un ressort élastique de raideur $E''_p(x_{\text{eq}})$. Si l'on applique le PFD au système, projeté sur $\vec{u}_x$, on aboutit à l'équation suivante :

$$\ddot{x} + \frac{E''_p(x_{\text{eq}})}{m}x = \frac{E''_p(x_{\text{eq}})}{m}x_{\text{eq}}$$

Comme attendu il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de position d'équilibre x_{eq}.

<u>Remarque</u> : Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r paramétré par la position angulaire θ le principe est le même. Si θ_{eq} est une position d'équilibre stable telle que $E_p'(\theta_{\text{eq}}) = 0$ et $E_p''(\theta_{\text{eq}}) > 0$ on peut effectuer l'approximation suivante au deuxième ordre, au voisinage de θ_{eq} :

$$E_p(\theta) \simeq E_p(\theta_{\text{eq}}) + \frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{2}(\theta - \theta_{\text{eq}})^2$$

Ensuite on admet qu'en coordonnées cylindro-polaires le gradient s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{F} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{r}(\theta - \theta_{\text{eq}})$$

Pour un mouvement circulaire de rayon r on rappelle que le vecteur accélération a pour expression $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. Le PFD projeté sur $\vec{u}_\theta$ s'écrit alors :

$$mr\ddot{\theta} = -\frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{r}(\theta - \theta_{\text{eq}}) \iff \ddot{\theta} + \frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{mr^2}\theta = \frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{mr^2}\theta_{\text{eq}}$$

Oscillations harmoniques autour d'une position d'équilibre stable

Si un système mécanique possède une position d'équilibre stable au niveau de laquelle $E_p'' > 0$ alors **les mouvements de petite amplitude autour de cette position d'équilibre sont des oscillations harmoniques**.

- pour un mouvement rectiligne paramétré par la coordonnée x la pulsation propre s'écrit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_p''(x_{\text{eq}})}{m}}$;
- pour un mouvement circulaire de rayon r paramétré par la coordonnée θ la pulsation propre s'écrit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_p''(\theta_{\text{eq}})}{mr^2}}$;

<u>Remarque</u> : Il est possible qu'une position d'équilibre stable soit telle que $E_p''(x_{\text{eq}}) = 0$. Dans ce cas les oscillations de petite amplitude autour de la position d'équilibre stable **ne sont pas harmoniques**.

4.3 Mise en œuvre pratique

En résumé

• Préciser le système, le référentiel et le repère d'étude ;

• Faire le bilan des forces, vérifier que le système est conservatif et exprimer l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de position ;

• Étudier les variations de l'énergie potentielle (maxima, minima notamment), en déduire les positions d'équilibre et leur stabilité ;

• S'il existe une position d'équilibre stable, écrire un développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, puis calculer la force approchée et en déduire l'équation du mouvement d'oscillations harmoniques. Identifier la pulsation/période propre.

Exemple

Une particule de masse m se déplace rectilignement le long d'un axe (Ox). Elle est soumise à une action mécanique dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$$

avec γ et ℓ des constantes positives.

1. Tracer le graphe de $E_p(x)$. Déterminer la position d'équilibre x_{eq} et montrer qu'elle est stable.

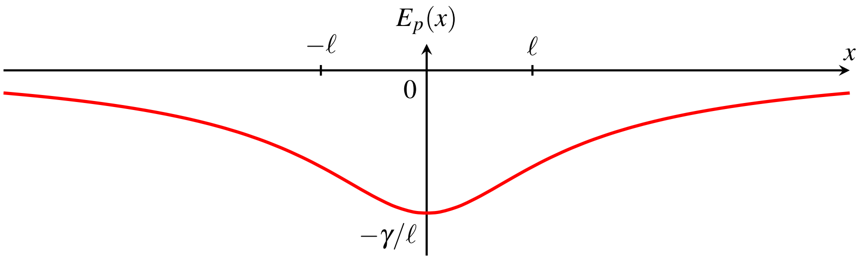
2. Déterminer une expression approchée de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur la particule au voisinage de x_{eq}. On écrira pour cela un développement de Taylor à l'ordre de deux de $E_p(x)$.
Donnée : gradient de la fonction énergie potentielle : $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$.

3. Déterminer la période des petites oscillations autour de x_{eq}.

4. La masse se trouve en x_{eq}. Déterminer la vitesse initiale minimale qu'il faut lui donner pour qu'elle s'éloigne à l'infini de cette position d'équilibre.

► **Étudier les variations d'une fonction**

1. La fonction $E_p(x)$ est suffisamment simple pour ne pas avoir à construire de tableau de variation. Elle est paire et strictement croissante sur $]0,+\infty]$. Elle est minimale en $x=0$ ($E_p(0) = -\gamma/\ell$) et tend vers zéro quand $x \to \pm\infty$. On trace son allure ci-dessous :



L'énergie potentielle est minimale en $x=0$ donc **c'est une position d'équilibre stable**.

► **Calculer un développement de Taylor à l'ordre deux**

2. On effectue l'approximation suivante au voisinage de $x=0$: $E_p(x) \simeq E_p(0) + \frac{E_p''(0)}{2}x^2$. On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$E_p'(x) = \frac{\gamma x}{(x^2+\ell^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad E_p''(x) = \frac{\gamma\left(\ell^2-2x^2\right)}{(x^2+\ell^2)^{5/2}} \quad \Longrightarrow \quad E_p''(0) = \frac{\gamma}{\ell^3}$$

L'énergie potentielle approchée vaut $E_p(x) \simeq -\frac{\gamma}{\ell} + \frac{\gamma}{2\ell^3}x^2$. On exprime la force associée :

$$\boxed{\vec{F} = -E_p'(x)\vec{u}_x \simeq -\frac{\gamma}{\ell^3}x\vec{u}_x}$$

► **Mettre en œuvre le PFD**

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{F}$. On projette sur $\vec{u}_x$ et on obtient l'équation : $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m\ell^3}x = 0$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m\ell^3}}$, donc de période propre : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^3}{\gamma}}}$.

► **Expliciter la condition pour franchir une barrière de potentiel**

4. Partant de $x = 0$, la particule doit franchir une barrière de potentiel pour s'éloigner à l'infini sur l'axe (Ox). Elle peut y arriver si aucun point de l'axe (Ox) ne se trouve dans une zone interdite, c'est-à-dire si **l'énergie mécanique est positive** : $E \geq 0$. On détermine la valeur de cette énergie mécanique à partir de l'état initial ($x = 0$, $v = v_0$) : $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma}{\ell}$. La vitesse initiale doit vérifier la condition suivante :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma}{\ell} \geq 0 \iff \boxed{v_0 \geq v_{0,\min} = \sqrt{\frac{2\gamma}{m\ell}}}$$

Application 6

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe (Ox). Il est soumis à une force $\vec{F}$ dérivant de l'énergie potentielle $E_p(x) = m\omega^2\left(\frac{x^4}{a^2} - x^2\right)$ avec a et ω des constantes positives.

1. Tracer le graphe de $E_p(x)$. Déterminer les positions d'équilibre du système et étudier leur stabilité.
2. Déterminer une expression approchée de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur la particule au voisinage de l'une des positions d'équilibre stable. On écrira pour cela un développement de Taylor à l'ordre de deux de $E_p(x)$.
   Donnée : gradient de la fonction énergie potentielle : $\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$.
3. Déterminer la période des oscillations autour des positions d'équilibre stable.
4. La masse se trouve dans l'une des positions d'équilibre stable. Déterminer la vitesse initiale minimale qu'il faut lui donner pour qu'elle atteigne l'autre position d'équilibre stable.