CHAPITRE 12 Oscillations amorties

On a présenté au chapitre 9 le modèle de l'oscillateur harmonique, qui décrit l'évolution de certains systèmes physiques conservatifs. En pratique quand un système oscille il existe toujours des sources de dissipation qui provoquent un amortissement. Dans ce chapitre on cherche à décrire en termes mathématiques l'effet d'un amortissement *linéaire* sur l'évolution d'un oscillateur. On traite de systèmes mécaniques ({masse + ressort} avec frottements) ou électroniques (circuit *RLC* série). Un certain nombre de méthodes utiles ont déjà été présentées dans les chapitres 6 et 9, notamment concernant les conditions initiales et la manière de résoudre une équation différentielle linéaire, on ne reviendra pas dessus. Revoyez rapidement ces chapitres si nécessaire.

1 Équation canonique d'un oscillateur amorti

1.1 Dissipation linéaire

Dans ce chapitre nous étudions deux types d'amortissement :

- En électronique la dissipation est produite par **effet Joule** dans un/plusieurs résistors. On parle d'amortissement linéaire car un résistor est un dipôle linéaire (*rappel :* d'après la loi d'Ohm : $u = \pm Ri$ donc la caractéristique statique est une droite).
- En mécanique la dissipation est produite par **frottement visqueux**, qu'on modélise par l'effet d'une force proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ (force de frottement linéaire).

L'évolution d'un oscillateur, amorti par un effet dissipatif linéaire, est caractérisée par une **équation différentielle linéaire**, dont on présente la forme canonique au paragraphe suivant. Par la suite on parlera d'oscillateur amorti sans préciser que l'amortissement est linéaire, ce sera toujours sous-entendu dans ce chapitre.

1.2 Équation canonique, facteur de qualité

Équation canonique d'un oscillateur amorti

L'équation d'évolution canonique d'un oscillateur amorti s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = b$$

avec b une fonction quelconque du temps, ω_0 la pulsation propre (comme dans l'équation de l'OH) et Q le **facteur de qualité** (sans dimension).

Remarque : L'équation de l'oscillateur amorti ressemble à celle de l'oscillateur harmonique, avec un terme supplémentaire : $\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Il traduit en termes mathématiques l'effet de la dissipation sur l'équation d'évolution de l'oscillateur. Le facteur de qualité apparaît au dénominateur donc **plus Q est élevé et plus l'amortissement est faible** (et vice-versa).

1.3 Facteur de qualité et régime d'amortissement

1.3.1 Polynôme caractéristique

On associe à l'équation canonique de l'oscillateur amorti le *polynôme caractéristique* suivant : $r \mapsto r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2$. L'évolution de l'oscillateur amorti dépend de la nature des racines du polynôme caractéristique, autrement dit de la valeur du discriminant Δ de l'équation du deuxième degré :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Il existe trois régimes d'amortissement différents, suivant la valeur de Δ (ou, ce qui revient au même, de Q). On les présente dans le tableau ci-dessous :

Régime	Apériodique	Critique	Pseudopériodique
Discriminant	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Facteur de qualité	$Q < \frac{1}{2}$	$Q = \frac{1}{2}$	$Q > \frac{1}{2}$
Racines du pol. carac.	2 racines réelles	1 racine double réelle	2 racines complexes conjuguées
Amortissement	Fort	Cas limite	Faible

1.3.2 Amortissement fort $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$: régime apériodique

Solution gérérale en régime apériodique

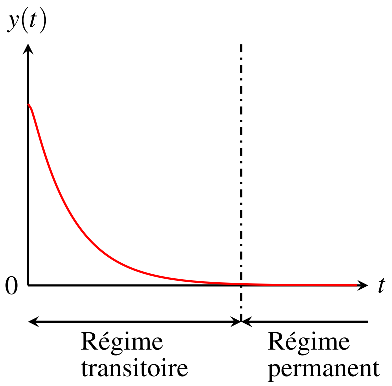
On s'intéresse à la solution générale de l'équation : $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = b$.

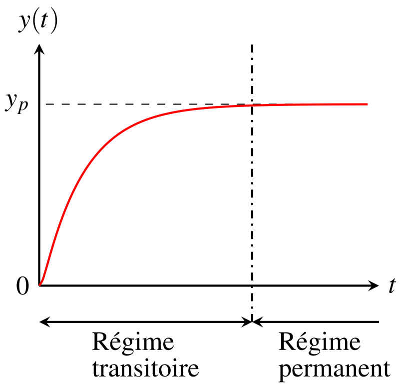
Dans ce chapitre on traite uniquement le cas où b est une fonction **constante**. On note par la suite $b(t) = b_0\ \forall t > 0$ (l'évolution commence généralement à $t = 0$). La solution générale en régime **apériodique** s'écrit :

$$\boxed{y(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} + y_p}$$

avec A et B deux constantes d'intégration, r_1 et r_2 les deux racines réelles du polynôme caractéristique et y_p la solution particulière qui est la solution de l'équation sans dérivée ($\omega_0^2 y_p = b_0$).

On peut montrer que les racines r_1 et r_2 sont toujours strictement négatives donc la solution converge vers y_p. En régime apériodique le système évolue **sans osciller** (voir exemples ci-dessous avec $y_p = 0$ puis $y_p \neq 0$).





L'évolution se divise en deux phases, un régime transitoire pendant lequel $y(t)$ est variable, suivi d'un régime permanent stationnaire où $y \simeq y_p$ ne varie plus.

On peut écrire la solution sous la forme : $y(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + y_p$ avec $\tau_1 = -1/r_1$ et $\tau_2 = -1/r_2$ sont les temps caractéristiques de décroissance des exponentielles. On considère que le régime transitoire est terminé quand les deux exponentielles sont proches de zéro. Ainsi l'exponentielle qui décroît le plus lentement (celle qui a le temps caractéristique le plus élevé) impose la durée du régime transitoire. La durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ avec $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$.

1.3.3 Amortissement faible $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$: régime pseudopériodique

Solution gérérale en régime pseudopériodique

La solution générale en régime **pseudopériodique** s'écrit :

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(r)t}\left[A\cos(\mathrm{Im}(r)t) + B\sin(\mathrm{Im}(r)t)\right] + y_p}$$

avec A et B deux constantes d'intégration et r la racine du polynôme caractéristique de partie imaginaire positive. $\mathrm{Re}(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de r.

Remarque : En utilisant les paramètres canoniques ω_0 et Q il est possible de montrer que :

$$\mathrm{Re}(r) = -\frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(r) = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La partie réelle est toujours strictement négative donc la solution converge vers y_p.

Pseudopulsation, pseudopériode, durée du régime transitoire

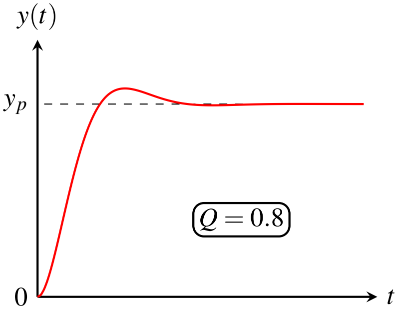
On peut écrire la solution sous la forme : $y(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + y_p$. On appelle *pseudopulsation* ω la pulsation de la partie sinusoïdale de la solution, et *pseudopériode* la période associée :

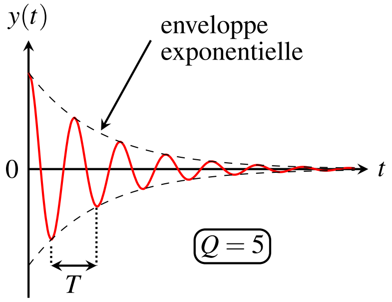
$$\omega = \mathrm{Im}(r) = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ, avec :

$$\tau = -\frac{1}{\mathrm{Re}(r)} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

En régime pseudopériodique le système effectue des **oscillations amorties exponentiellement**. On retient que plus le facteur de qualité est élevé et plus le nombre d'oscillations pendant le régime transitoire est élevé (voir exemples ci-dessous avec $Q = 0,8$ et $y_p \neq 0$ d'un côté, $Q = 5$ et $y_p = 0$ de l'autre).





> Pour tracer rapidement l'allure d'un graphe en régime pseudopériodique on retient ce critère simple : **le nombre d'oscillations "visibles" (amorties à moins de 95%) est environ égal au facteur de qualité**.

1.3.4 Cas limite $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$: régime critique

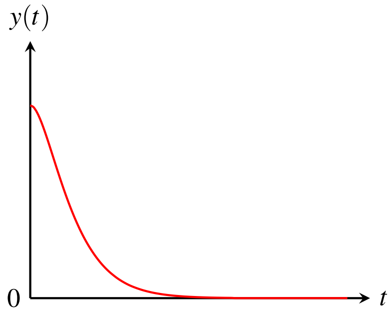
Solution gérérale en régime critique

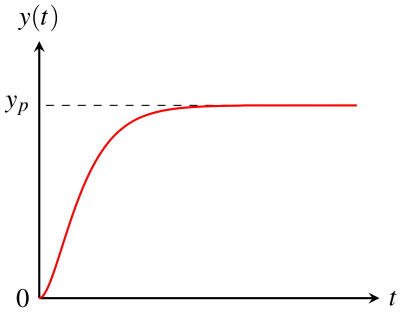
La solution générale en régime **critique** s'écrit :

$$\boxed{y(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{rt} + y_p}$$

avec A et B deux constantes d'intégration et r la racine double du polynôme caractéristique.

L'évolution en régime critique est semblable au régime apériodique, le système évolue **sans osciller** (voir exemples ci-dessous avec $y_p = 0$, puis $y_p \neq 0$).



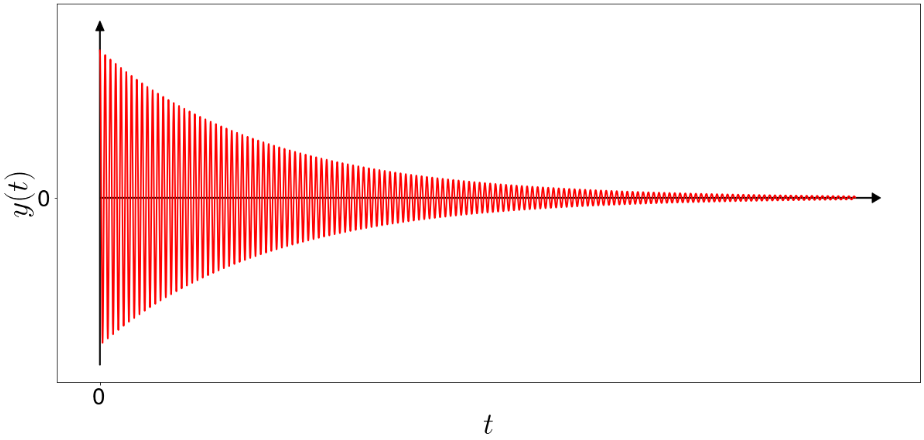


La durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ, avec : $\tau = -\dfrac{1}{r}$.

> Le régime critique a une propriété particulière : à ω_0 fixée, le temps caractéristique τ est minimal lorsque $Q = 1/2$.
>
> À ω_0 fixée **le temps de retour à l'équilibre est minimal en régime critique.**

1.3.5 Cas particulier : amortissement très faible $(Q \gg 1)$

L'amortissement très faible est un cas particulier dans le domaine du régime pseudopériodique. Le système effectue un très grand nombre d'oscillations avant d'atteindre le régime permanent (voir exemple ci-dessous).

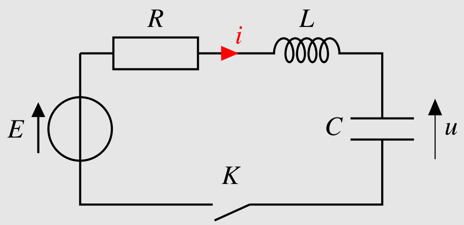


On retient que dans ce domaine le système oscille quasiment à la pulsation propre : $\boxed{\omega \simeq \omega_0}$, car $\dfrac{1}{4Q^2} \ll 1$.

2 Oscillateur amorti électronique

Exemple

Dans le circuit RLC série ci-contre le condensateur est initialement déchargé. Le générateur impose une tension E continue. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. On donne $R = 100\,\Omega$, $L = 4,5\,\text{mH}$ et $C = 50\,\text{nF}$.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. Exprimer la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
Quel est le régime d'amortissement ?

2. Déterminer $u(t)$ à tout instant $t \geq 0$.

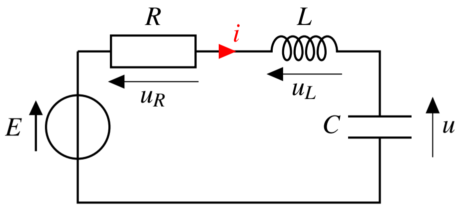
3. Tracer le graphe de $u(t)$.

4. Déterminer numériquement un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

5. Les valeurs de L et C étant fixées, déterminer pour quelle valeur de R on se trouve en régime critique.

► **Identifier les paramètres canoniques d'un oscillateur amorti**

1. On représente et on annote le schéma du circuit pour $t > 0$, lorsque l'interrupteur est dans la position 1. On applique la loi des mailles :



$$E = u + u_R + u_L$$

avec $u_R = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$. On obtient :

$$E = u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}}$$

On identifie les paramètres canoniques :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3}$$

L'application numérique permet de reconnaître que $Q > 1/2$: on est en **régime pseudopériodique**.

► **Déterminer les conditions initiales**

2. Avant de résoudre l'équation différentielle nous avons besoin de connaître les deux conditions initiales vérifiées par $u(t)$, à savoir les valeurs $u(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Initialement le condensateur est déchargé donc $u(0^-) = 0$ et l'interrupteur est ouvert donc $i(0^-) = 0$. Le condensateur impose la continuité de u et la bobine celle de i. Par conséquent : $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Or, d'après la loi du condensateur : $i(0^+) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$. On conclut que :

$$u(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

► **Résoudre l'équation de l'oscillateur amorti**

Étape 1 : solution particulière

On commence par déterminer la solution particulière u_p en résolvant l'équation sans dérivée :

$$\frac{u_p}{LC} = \frac{E}{LC} \iff u_p = E$$

Étape 2 : solution générale

On cherche les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire les solutions de l'équation : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant vaut : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$. Il est strictement négatif puisque l'on a montré que l'on est en régime pseudopériodique. On écrit les deux racines complexes conjuguées :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{\frac{-\Delta}{2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On pose $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ pour la suite des calculs. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + E$$

Étape 3 : conditions initiales et constantes d'intégration

On détermine les valeurs de A et B respectant les deux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0^+) = 0 = A + E \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \omega B \end{cases} \iff \quad A = -E \quad \text{et} \quad B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}A = -\frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

On conclut :

$$\boxed{u(t) = E\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\omega t)\right)\right]}$$

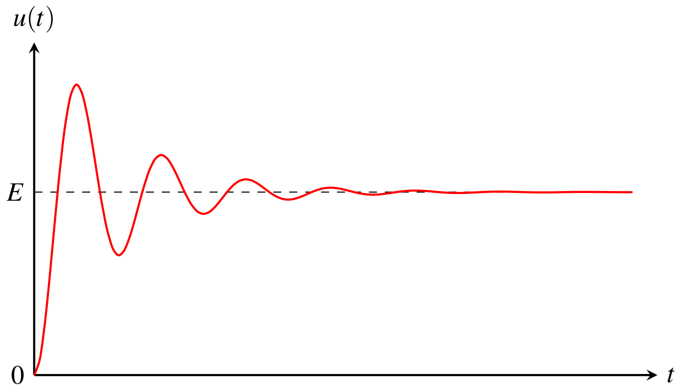
Remarque : En physique on écrit souvent le nombre imaginaire j et non i pour éviter toute confusion avec une éventuelle intensité. Par ailleurs le conjugué d'un nombre complexe z est noté z^* et non $\underline{z}$, comme en mathématique. La raison sera précisée au chapitre suivant sur les oscillations forcées.

▶ Tracer rapidement l'allure d'un graphe

3. Inutile de réaliser une étude de fonction détaillée pour tracer l'allure du graphe. Quelques informations suffisent pour obtenir une allure correcte :

- On connaît la valeur en $t = 0^+$: $u(0^+) = 0$.
- On connaît la dérivée en $t = 0^+$: $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$. Il y a **une tangente horizontale** à l'origine.
- La tension $u(t)$ tend vers l'asymptote $u_p = E$ (régime permanent).
- On est en régime pseudopériodique donc il y a des oscillations amorties exponentiellement. La valeur de Q indique le nombre d'oscillations "visibles", environ 3.

Ces informations nous permettent de tracer l'allure suivante :



▶ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire

4. Le terme $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ traduit l'effet de l'amortissement. Cette exponentielle peut s'écrire sous la forme : $e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. On évalue la durée du régime transitoire :

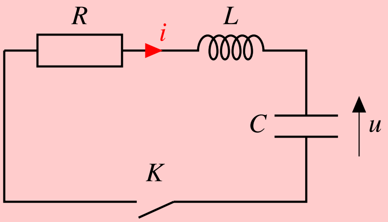
$$\boxed{\Delta t_{\text{trans}} \sim 5\tau = \frac{10Q}{\omega_0} = 0,45\,\text{ms}}$$

5. Le régime critique correspond à $Q = 1/2$. On calcule la résistance correspondante :

$$Q = \frac{1}{2} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \iff \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 600\,\Omega}$$

Application 1

Un circuit RLC série est initialement tel que le condensateur est chargé sous une tension E. À la date $t = 0$ on ferme l'interrupteur K (voir figure ci-contre).



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.

2. On pose $RC = \frac{2L}{R} = \tau$. Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire uniquement en fonction du paramètre τ.

Calculer $u(t)$ en fonction de E, τ et du temps t. Tracer l'allure de son graphe.

3. Mêmes questions dans le cas où $\frac{RC}{2} = \frac{2L}{R} = \tau$.

4. Mêmes questions dans le cas où $\frac{4RC}{5} = \frac{5L}{R} = \tau$.

3 Oscillateur amorti mécanique

La différence entre un oscillateur amorti électronique ou mécanique tient essentiellement à la façon d'établir l'équation différentielle : avec les lois de l'électricité dans le premier cas, avec un théorème mécanique (le PFD généralement) dans le second. On a vu au chapitre 9 comment établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique mécanique. Désormais on ajoute l'effet d'une force de frottement visqueux linéaire : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

Application 2

On étudie le comportement d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason.

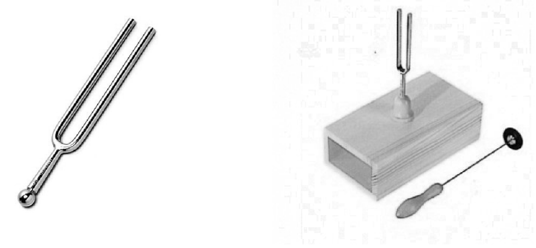


Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en vitesse.

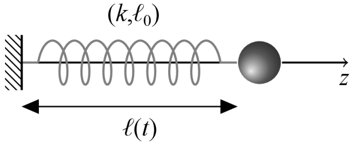


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir **figure 2**). De plus on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

1. Quel phénomène physique peut expliquer que l'énergie mécanique du diapason diminue au cours du temps lorsqu'il oscille ? La force $\vec{f}$ modélise de façon simplifiée ce phénomène dissipatif.

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

2. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.

3. Exprimer la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k, m et α.

4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression de $z(t)$ en fonction de k, m, α et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

5. Proposer une estimation grossière de la constante de raideur du ressort équivalent et du facteur de qualité.