TD14 : Filtrage linéaire - corrigé

Application 1

À la fréquence $f = 2\,\text{kHz}$ on lit sur le diagramme de Bode :

$$G_{\text{dB}}(2\,\text{kHz}) = -20\,\text{dB} \Longrightarrow \boxed{G(2\,\text{kHz}) = 0,1} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(2\,\text{kHz}) = -84°}$$

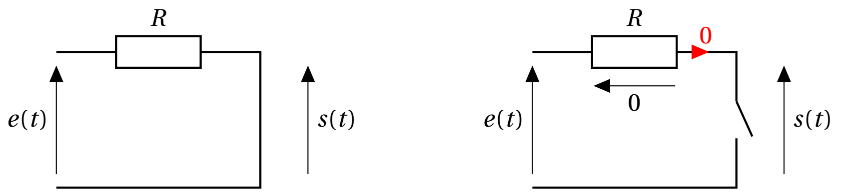
On détermine l'amplitude et la phase à l'origine du signal de sortie :

$$\boxed{S_m = G(2\,\text{kHz})E_m = 0,50\,\text{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_s = \varphi_e + \varphi(2\,\text{kHz}) = -44°}$$

Application 2

On représente pour chacun de ces filtres le schéma équivalent en BF et HF.

$\boxed{\text{Filtre } (F_a)}$:



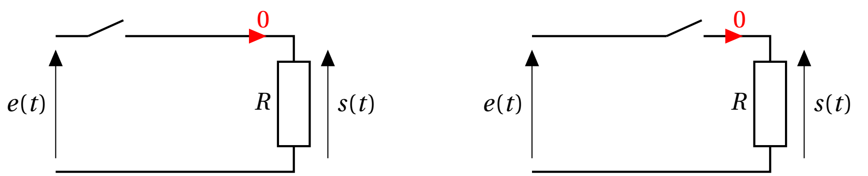
BF HF

En BF la sortie est branchée aux bornes d'un court-circuit : $s = 0$.

En HF l'intensité est nulle (circuit ouvert) donc la tension aux bornes du résistor est nulle (loi d'Ohm). D'après la loi des mailles : $s = e$.

Le filtre (F_a) coupe les BF et transmet les HF : c'est un filtre **passe-haut**.

$\boxed{\text{Filtre } (F_b)}$:

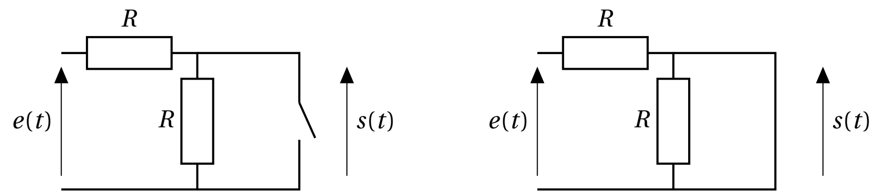


BF HF

En BF comme en HF, l'intensité est nulle (circuit ouvert). D'après la loi d'Ohm : $s = 0$.

Le filtre (F_b) coupe les BF et les HF : c'est un filtre **passe-bande**.

$\boxed{\text{Filtre } (F_c)}$:



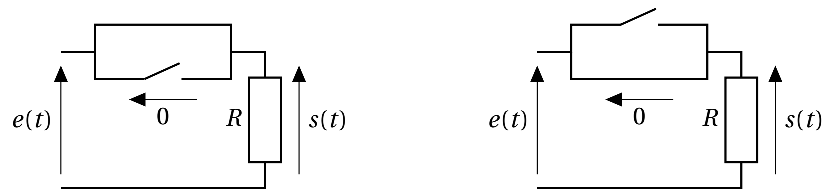
BF HF

En BF on peut supprimer la branche ouverte. La sortie est branchée aux bornes de la résistance "verticale". On détermine la tension de sortie à l'aide de la loi du pont diviseur de tension : $s = e/2$.

En HF la sortie est branchée aux bornes d'un court-circuit : $s = 0$.

Le filtre (F_c) transmet les BF et coupe les HF : c'est un filtre **passe-bas**.

$\boxed{\text{Filtre } (F_d)}$:



BF HF

En BF comme en HF, la tension aux bornes des deux dipôles en dérivation est nulle car l'un des deux se comporte comme un court-circuit. D'après la loi des mailles : $s = e$.

Le filtre (F_d) transmet les BF et les HF : c'est un filtre **rejecteur de bande**.

Application 3

1. On entre dans l'espace complexe et on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{E} \Longrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}}$$

On identifie les deux paramètres : $\boxed{H_0 = 1}$ et $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$.

2. On simplifie l'expression de la fonction de transfert en BF ($\omega \ll \omega_0$ donc au dénominateur le terme $\frac{\omega_0}{\omega}$ prédomine devant 1) :

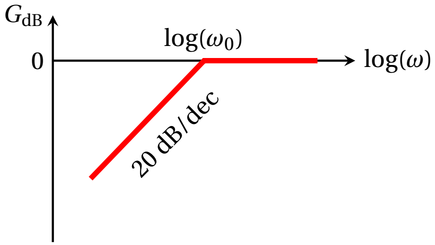
$$\underline{H} \simeq \frac{j\omega}{\omega_0} \Longrightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = 20\log\omega - 20\log\omega_0 \\ \varphi \simeq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

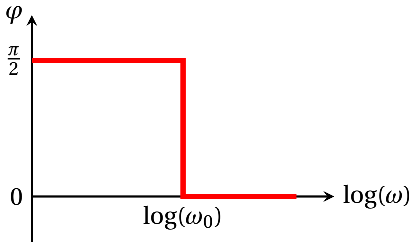
En BF le diagramme de Bode en gain possède une asymptote oblique de pente 20 dB/dec et le diagramme de Bode en phase possède une asymptote horizontale à $\frac{\pi}{2}$ rad.

On simplifie en HF ($\omega \gg \omega_0$ donc au dénominateur le terme 1 prédomine devant $\frac{\omega_0}{\omega}$) :

$$\underline{H} \simeq 1 \implies \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 0 \\ \varphi \simeq 0 \end{cases}$$

En HF le diagramme de Bode en gain possède une asymptote horizontale à 0 dB et le diagramme de Bode en phase possède une asymptote horizontale à 0 rad. On conclut en traçant l'allure du diagramme de Bode asymptotique.





Application 4

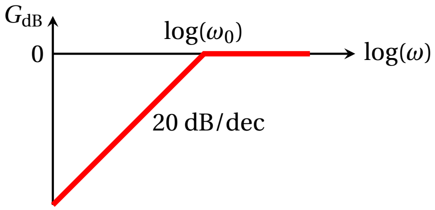
Dans le domaine BF on a vu dans l'application 3 que :

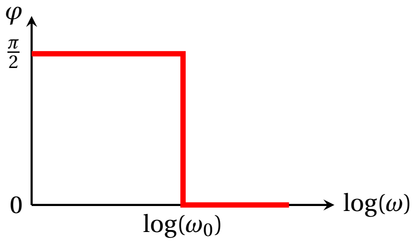
$$\underline{H} \simeq \frac{j\omega}{\omega_0} \implies \underline{S} = \frac{1}{\omega_0} \times j\omega \underline{E} \xrightarrow{\mathbb{R}} \boxed{s(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

Ce filtre a un comportement dérivateur dans le domaine $\omega \ll \omega_0$.

Application 5

1. On reconnait la fonction de transfert d'un filtre **passe-haut du premier ordre**, de fréquence de coupure $\boxed{f_0 = 50\,\text{Hz}}$. On trace l'allure du diagramme de Bode asymptotique :





2. On exprime le gain et la phase de ce filtre :

$$\boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}} \quad ; \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

3. Un filtre traite une composante continue comme un signal de fréquence nulle. Comme ce filtre est un passe-haut on s'attend à ce que **la composante continue soit coupée**. La composante de fréquence $f = 5\,\text{kHz}$ se situe largement à l'intérieur de la bande passante $]50\,\text{Hz}, +\infty[$. On s'attend à ce que **cette composante soit transmise sans atténuation ni déphasage**.

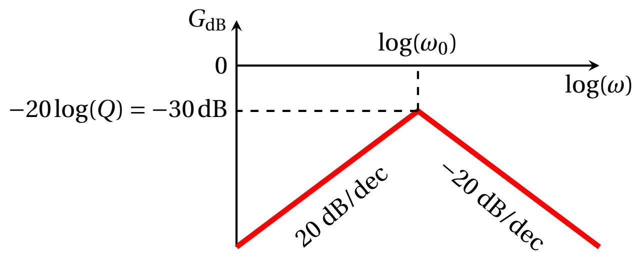
On vérifie par le calcul :

$$\begin{cases} G(0) = 0 \\ \varphi(0) = \pi/2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} G(f) = 1 \\ \varphi(f) = 0{,}6° \simeq 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{s(t) \simeq E_1 \cos(2\pi f t)}$$

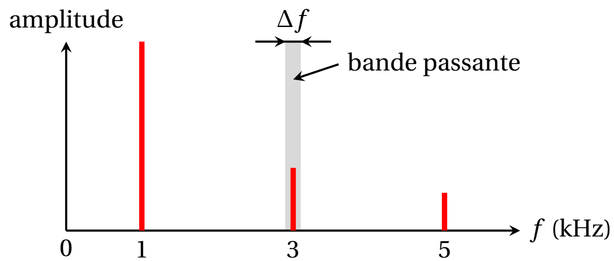
C'est cohérent avec notre prédiction.

Application 6

1. On reconnait la fonction de transfert d'un filtre **passe-bande du deuxième ordre**. La largeur de la bande passante vaut $\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 100\,\text{Hz}}$. On trace l'allure du diagramme de Bode asymptotique en gain :



2. On trace l'allure du spectre en amplitude du signal d'entrée et on indique la bande passante.

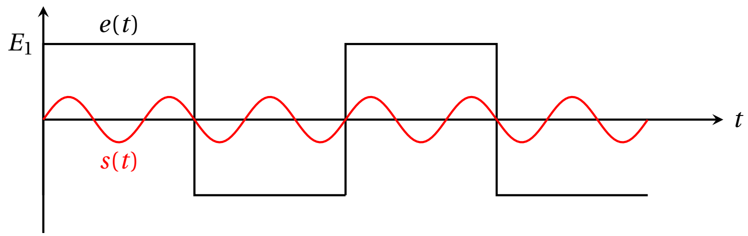


TD14 : Filtrage linéaire - corrigé

On constate que :

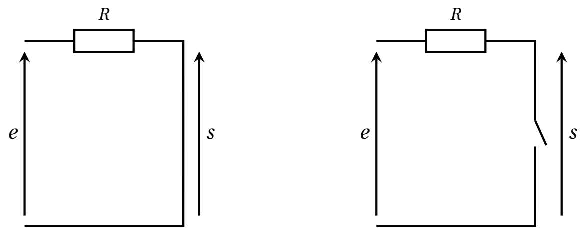
- la composante de fréquence $3f = f_0$ est dans la bande passasnte. Elle est même transmise sans atténuation car $G(f_0) = 1$;
- toutes les autres componsantes sont éloignées de la bande passante, elles sont fortement atténuées.

Par conséquent on peut considérer que le signal de sortie est approximativement **sinusoïdal de fréquence** $3f$, c'est-à-dire de fréquence trois fois plus élevée que celle du signal d'entrée, d'où le nom de tripleur de fréquence donné à ce montage. On trace l'allure du signal de sortie :



⋆ Exercice 1 : Étude d'un filtre

1. On étudie le comportement en BF et HF :



BF HF

En BF, $s = 0$ (tension aux bornes d'un fil). En HF, $s = e$ (loi des mailles) car la tension aux bornes de R est nulle. Par conséquent, $\boxed{\text{le filtre est un passe-haut}}$.

2. On détermine la fonction de transfert en appliquant la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}}$$

On écrit $\underline{H}$ sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{R}{L} \implies \boxed{f_c = \frac{R}{2\pi L} = 500\,\mathrm{Hz}}$$

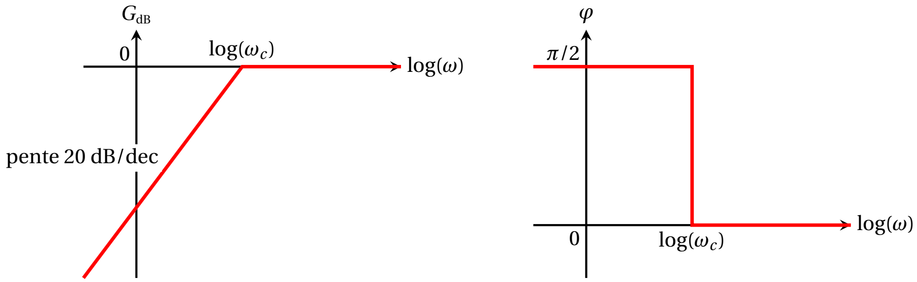
3. On détermine l'équation des asymptotes, d'abord pour $\omega \ll \omega_c$:

$$\underline{H} \simeq \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c} \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

puis pour $\omega \gg \omega_c$:

$$\underline{H} \simeq 1 \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

On trace ci-dessous l'allure du diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase).



4. On vient de voir que dans le domaine $\omega \ll \omega_c$:

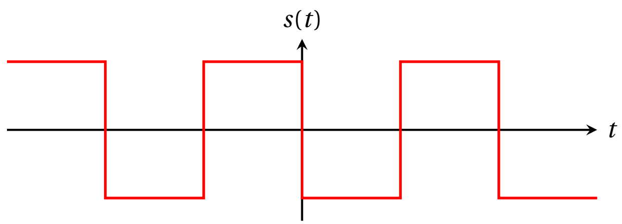
$$\underline{H} \simeq \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c} \implies s(t) \simeq \frac{1}{\omega_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

Ce filtre est **dérivateur dans le domaine** $f \ll f_c$.

5. La tension de sortie s'écrit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ avec :

$$\begin{cases} S_m = G(f)E_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}} = \boxed{0{,}98\,\mathrm{V}} \\ \varphi_s = \varphi(f) = \arctan\left(\dfrac{f_c}{f}\right) = \boxed{79°} \end{cases}$$

6. On voit sur le diagramme de Bode asymptotique en gain que **la composante continue est totalement atténuée** (le gain est nul quand $f = 0$). La partie variable, de fréquence $f \ll f_c$ se situe dans le domaine d'atténuation. Elle donc atténuée mais on a également vu à la question 4. qu'elle est **dérivée**. Le signal $s(t)$ a donc l'allure d'un **rectangle** de fréquence $f = 20\,\mathrm{Hz}$, de moyenne nulle et d'amplitude sensiblement plus faible que 3 V.



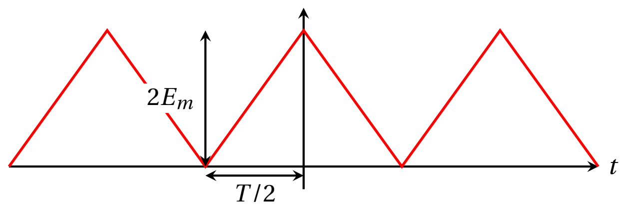
Pour calculer l'amplitude de ce signal rectangulaire rappelons que pour $f \ll f_c$ on peut écrire de manière approchée :

$$s(t) = \frac{1}{\omega_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi f_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

Pour calculer l'amplitude de la tension de sortie il faut connaître $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, c'est-à-dire le **coefficient directeur** du signal triangulaire en entrée. Sachant que l'amplitude du triangle est E_m et sa période $T = 1/f$, on peut écrire que :

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{2E_m}{T/2} = \pm 4fE_m$$

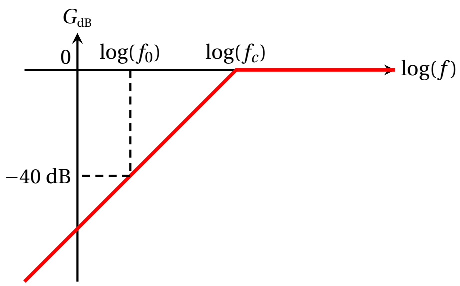
Le calcul est illustré sur la figure ci-dessous.



On en déduit que $s(t) = \pm\frac{2}{\pi}\frac{f}{f_c}E_m$ (signal rectangulaire) et donc que l'amplitude en sortie vaut :

$$\boxed{S_m = \frac{2}{\pi}\frac{f}{f_c}E_m = 76\,\mathrm{mV}}$$

7. Traçons le diagramme de Bode asymptotique en gain dans le cas limite qui respecte le cahier des charges. On note ici $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$.



Puisque la pente est égale à 20 dB/dec dans le domaine d'atténuation il faut que la fréquence de coupure du filtre soit choisie de sorte que :

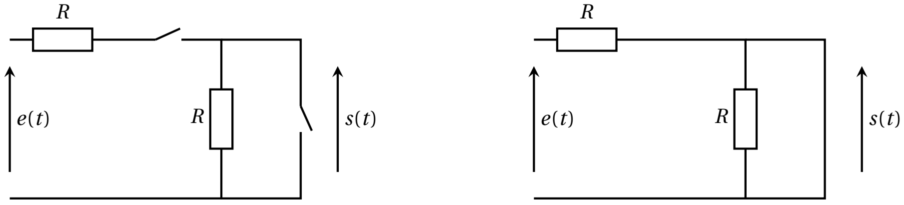
$$\log(f_c) \geq 2 + \log(f_0) = 4 \implies f_c \geq f_{c,\mathrm{min}} = 10\,\mathrm{kHz}$$

On en déduit la condition vérifiée par la résistance R :

$$\frac{R}{2\pi L} \geq f_{c,\mathrm{min}} \iff \boxed{R \geq 2\pi L f_{c,\mathrm{min}} = 5{,}4\,\mathrm{k}\Omega}$$

⋆ Exercice 2 : Filtre de Wien

1. On étudie le comportement en BF et HF :



BF HF

En BF, $s = 0$ (le courant est nul dans la résistance "verticale"). En HF, $s = 0$ (tension aux bornes d'un fil). Par conséquent, $\boxed{\text{le filtre est un passe-bande}}$.

2. On rassemble les deux impédances $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_C$ en dérivation :

$$\underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega$$

puis on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \\
&= \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\mathrm{eq}}\left(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right) \times \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)} \\
&= \frac{1}{3 + \mathrm{j}RC\omega + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{\mathrm{j}}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}
\end{aligned}$$

On identifie $\boxed{H_0 = 1/3}$, $\boxed{\omega_0 = 1/RC}$ et $\boxed{Q = 1/3}$. Un filtre est très sélectif si sa bande passante est fine ($\Delta\omega \ll \omega_0$), c'est-à-dire si $Q \gg 1$. Ce n'est pas le cas du filtre de Wien ; **ce filtre est peu sélectif**.

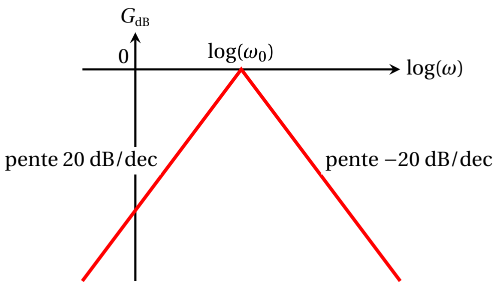
3. On détermine l'équation des asymptotes, d'abord pour $\omega \ll \omega_0$:

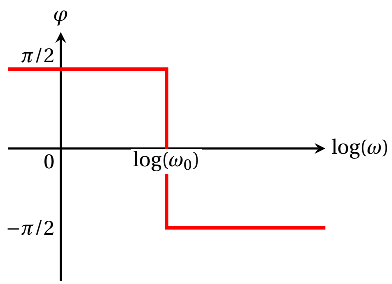
$$\underline{H} \simeq \frac{\mathrm{j}\omega H_0}{Q\omega_0} \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) + \underbrace{20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right)}_{=0} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

puis pour $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H} \simeq \frac{\omega_0 H_0}{\mathrm{j}\omega Q} \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = -20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) + \underbrace{20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right)}_{=0} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On trace ci-dessous l'allure du diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase).





4. Le signal d'entrée est la somme de deux tensions sinusoïdales, la première de fréquence $f_1 = f_0 = 10\,\mathrm{kHz}$ et la seconde de fréquence $f_2 = 100\,\mathrm{kHz}$. On détermine le signal de sortie en calculant séparement l'action du filtre sur chacune des deux composantes d'entrée. Avant cela on exprime le gain et la phase du filtre pour une fréquence f quelconque :

$$G(f) = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(f) = -\arctan\left(Q\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)\right)$$

Le signal de sortie a pour expression $s(t) = S_{1m}\cos(2\pi f_1 t + \varphi_{s1}) + S_{2m}\cos(2\pi f_2 t + \varphi_{s2})$ avec :

$$\begin{cases} S_{1m} = G(f_1)E_{1m} = \boxed{2\,\mathrm{V}} \\ S_{2m} = G(f_2)E_{2m} = \boxed{0{,}29\,\mathrm{V}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_{s1} = \varphi(f_1) = \boxed{0} \\ \varphi_{s2} = \varphi(f_2) = \boxed{-73° = -1{,}28\,\mathrm{rad}} \end{cases}$$

5. On calcule le gain du filtre pour $f = 10 f_0$ et $f = f_0/10$:

$$G(f_0/10) = G(10 f_0) = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\,(10-0{,}1)^2}} \simeq \frac{H_0}{10Q}$$

Pour le filtre de Wien ($H_0 = 1/3$, $Q = 1/3$) l'application numérique donne :

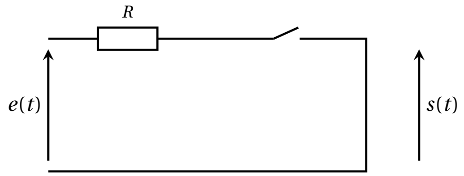
$$G = \frac{1}{10} \implies G_{\mathrm{dB}} = -20\,\mathrm{dB}$$

Le filtre de Wien ne remplit pas le cahier des charges. Le facteur de qualité doit respecter la contrainte suivante :

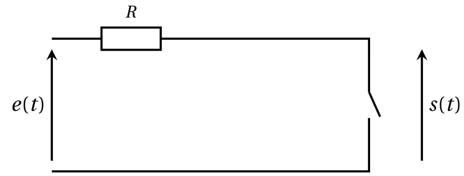
$$20\log\left(\frac{H_0}{10Q}\right) \leq -50 \iff \frac{10Q}{H_0} \geq 10^{5/2} \iff \boxed{Q \geq 10^{3/2} H_0 = 10{,}5}$$

⋆ Exercice 3 : Filtre RLC série

1. On représente le circuit équivalent en BF et HF :



BF



HF

En BF, $s = 0$ (tension aux bornes d'un fil). En HF, $s = e$ (la tension aux bornes de la résistance est nulle car $i = 0$).

Le filtre coupe les BF et transmet les HF, il s'agit d'un $\boxed{\text{filtre passe-haut}}$.

2. On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L}+\underline{Z_R}+\underline{Z_C}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}L\omega + R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{1+\frac{R}{\mathrm{j}L\omega}-\frac{1}{LC\omega^2}}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}} \\ \boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}} \end{cases}$$

3. On simplifie la fonction de transfert pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$:

$$\text{BF} : \underline{H} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 40\log\omega - 40\log\omega_0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

$$\text{HF} : \underline{H} \simeq 1 \iff \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Sur le diagramme de Bode en gain, on mesure une pente de +40 dB/décade. Les résultats sont cohérents avec l'allure des diagrammes de Bode en gain et phase.

4. On exprime la fonction de transfert pour $\omega = \omega_0$: $\underline{H}(\omega_0) = \mathrm{j}Q$. On en déduit que :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = 20\log Q}$$

Sur le diagramme de Bode en phase, on lit $\boxed{f_0 = 500\,\mathrm{Hz}}$. Sur le diagramme de Bode en gain :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = -6\,\mathrm{dB} \iff \boxed{Q = 10^{\frac{G_{\mathrm{dB}}(\omega_0)}{20}} = 0{,}50}$$

5. Le signal d'entrée a une fréquence $f = 100\,\text{Hz}$. À cette fréquence on lit :

$$\begin{cases} G_{\text{dB}} = -28\,\text{dB} \\ \varphi \simeq 160° = 2,8\,\text{rad} \end{cases} \iff \begin{cases} S_m = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{20}} E_m = 0,20\,\text{V} \\ \varphi_s = \varphi + \varphi_e = 2,8\,\text{rad} \end{cases}$$

La tension de sortie s'exprime sous la forme :

$$\boxed{s(t) = 0,20\cos(2\pi\cdot 100\,t + 2,8) \ \ \text{(avec } s \text{ en V et } t \text{ en s)}}$$

6. La tension d'entrée a une fréquence $f \gg f_0$. Par conséquent, la partie variable de $e(t)$ est transmise sans atténuation ni déphasage. En revanche, la composante continue de $e(t)$ est éliminée par le filtre, qui coupe les BF.
$\boxed{s(t) \text{ est rectangulaire, de moyenne nulle, de même amplitude que la tension d'entrée}}$.

⋆ Exercice 4 : Étude d'un diagramme de Bode

1. Le filtre est un $\boxed{\text{passe-bande}}$. La sortie est branchée aux bornes de la résistance.

2. On lit une fréquence de résonance $\boxed{f_0 = 300\,\text{Hz}}$ et des fréquences de coupure à -3dB $\boxed{f_1 = 250\,\text{Hz}}$ et $\boxed{f_2 = 400\,\text{Hz}}$.

Le facteur de qualité vaut $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{f_2 - f_1} = 2}$.

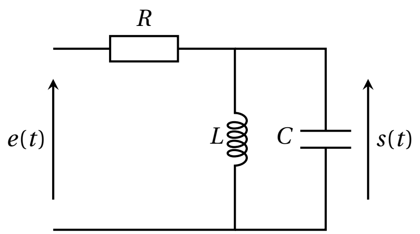
3. On détermine L et C à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_0} \\ \sqrt{\frac{L}{C}} = QR \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{L = \dfrac{QR}{2\pi f_0} = 0,11\,\text{H}} \\ \boxed{C = \dfrac{1}{2\pi f_0 QR} = 2,7\,\mu\text{F}} \end{cases}$$

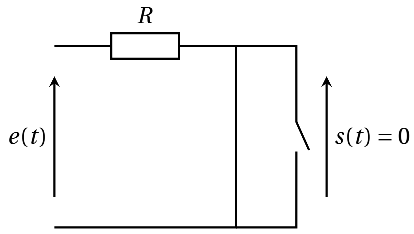
⋆⋆ Exercice 5 : Filtre mystère

1. Un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime stationnaire. S'il était branché en série dans le circuit alors dans la première expérience (circuit alimenté par un générateur de tension continue) l'intensité serait **nulle au bout d'un temps très long**. Ce n'est pas ce qui est observé ; on conclut que **le condensateur n'est pas branché en série dans le circuit**.

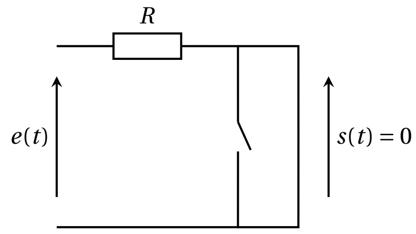
2. Le filtre doit être un passe-bande, on propose le montage ci-dessous :



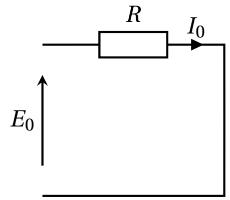
On vérifie avec des schémas équivalents en BF et HF qu'il est bien passe-bande.



BF



HF



On commence par déterminer la valeur de R. En régime stationnaire le schéma équivalent du circuit dans la première expérience a l'allure ci-contre.

On trouve alors que $\boxed{R = \dfrac{E_0}{I_0} = 1\,\text{k}\Omega}$.

On étudie ensuite le comportement du circuit en régime sinusoïdal forcé en calculant sa fonction de transfert, après avoir rassemblé les impédances $\underline{Z}_C$ et $\underline{Z}_L$ en dérivation :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \text{j}C\omega + \frac{1}{\text{j}L\omega}$$

On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

On détermine la pulsation propre et le facteur de qualité par identification avec la forme canonique :

$$\begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

On sait que pour un tel filtre la largeur de la bande passante est telle que $\Delta f = f_0/Q$. Dans le cas présent on trouve :

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \times \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Avec les valeurs de f_0 et Δf on détermine les valeurs de L et C :

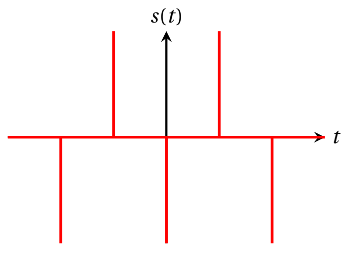
$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi R\Delta f} = 468\,\text{nF}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 40,2\,\text{mH}}$$

3. Un filtre passe-bande du deuxième ordre a un comportement **dérivateur en BF** ($f \ll f_0$) et **intégrateur en HF** ($f \gg f_0$) (**Voir démo dans le cours**). Par conséquent le signal de sortie a la forme:

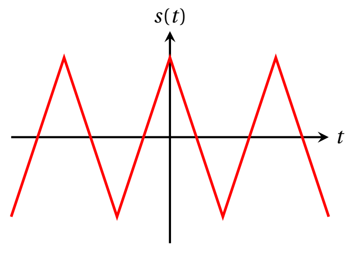
TD14 : Filtrage linéaire - corrigé

- de la dérivée d'un rectangle, autrement dit une série d'implusions, pour une fréquence très faible ;
- de la primitive d'un rectangle, autrement dit un triangle, pour une fréquence très élevée.

On représente graphiquement les deux cas de figure.



$f \ll f_0$

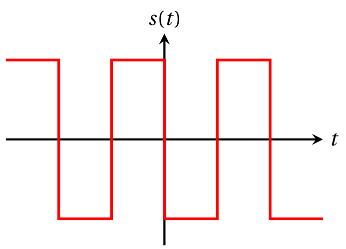


$f \gg f_0$

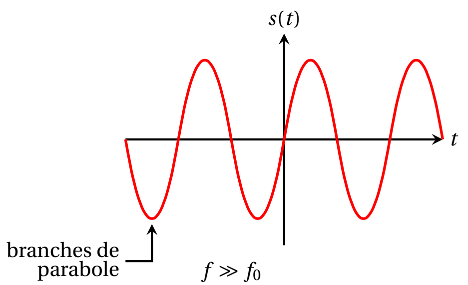
3. Le même raisonnement pour un signal d'entrée triangulaire conduit à dire que le sortie de sortie a la forme :

- de la dérivée d'un triangle, autrement dit d'un rectangle, pour une fréquence très faible ;
- de la primitive d'un triangle, autrement dit une succesion de branches de paraboles convexes et concaves, pour une fréquence très élevée.

On représente graphiquement les deux cas de figure.

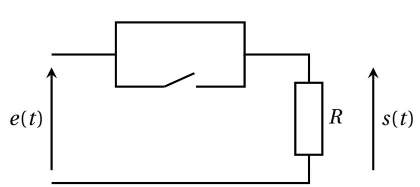


$f \ll f_0$

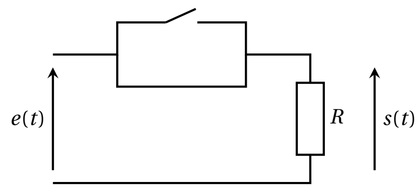


$f \gg f_0$

⋆⋆ Exercice 6 : Circuit anti-résonant



BF



HF

Dans les deux cas, $s(t) = e(t)$ (loi des mailles). Ce filtre pourrait être un $\boxed{\text{rejecteur de bande}}$.

On détermine la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_L} /\!/ \underline{Z_C} + \underline{Z_R}} = \frac{1}{1 + \underline{Y_R}(\underline{Z_L} /\!/ \underline{Z_C})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{L}{C}}{\mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}} = \frac{1}{1 + \frac{L}{RC} \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$$

Le gain du filtre vaut : $G = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{RC}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

Le gain s'annule lorsque le dénominateur diverge, c'est-à-dire lorsque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \iff \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

On détermine ensuite les pulsations de coupure. Le gain maximal vaut $G_{\max} = 1$ (quand $\omega \longrightarrow 0$ ou $\omega \longrightarrow \infty$). On cherche les pulsations qui vérifient :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left(\frac{L}{RC}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 1 \iff L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm\frac{L}{RC} \iff \omega^2 \pm \frac{\omega}{RC} - \frac{1}{LC} = 0$$

Le discriminant de ces deux trinômes (signe + et signe -) vaut $\Delta = \frac{1}{(RC)^2} + \frac{4}{LC} > 0$. On dénombre en tout quatre solutions. Les pulsations de coupures correspondent aux deux seules solutions positives, qui sont les suivantes :

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

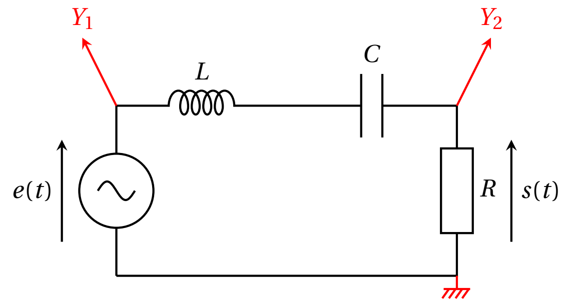
La largeur de la bande de coupure vaut :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} \iff \boxed{\Delta f = \frac{1}{2\pi RC} = 4{,}0 \cdot 10^2\,\text{Hz}}$$

⋆⋆⋆ Exercice 7 : Analyse d'un filtre

1. Sur le premier oscillogramme, la période vaut $T = 20\,\mu\text{s}$ donc la fréquence $f = 50\,\text{kHz}$. Sur le second oscillogramme, $T = 20\,\text{ms}$ donc $f = 50\,\text{Hz}$. On reconnaît que le filtre a un comportement pseudo-intégrateur aux HF (en sortie, le triangle est la primitive du créneau d'entrée) et un comportement pseudo-dérivateur aux BF (le créneau de sortie est la dérivée du triangle d'entrée).

Ce comportement est cohérent avec celui d'un $\boxed{\text{filtre RLC série passe-bande}}$. On trace le schéma du circuit :



2. On étudie le comportement asymptotique du filtre. La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \iff \begin{cases} \underline{H} \simeq \mathrm{j}RC\omega \iff \boxed{s(t) \simeq RC\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}} & \text{(BF)} \\ \underline{H} \simeq \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} \iff \boxed{s(t) \simeq \dfrac{R}{L}\displaystyle\int e(t)\mathrm{d}t} & \text{(HF)} \end{cases}$$

3. Sur le premier oscillogramme (HF), le signal d'entrée est un rectangle d'amplitude $E_m = 4\,\mathrm{V}$. En sortie, le triangle a une amplitude $S_m = 150\,\mathrm{mV}$. D'après la question précédente, l'expression théorique de $s(t)$, lorsque $e(t) = E_m$, est la suivante : $s(t) = \frac{Rt}{L}E_m + \mathrm{Cste}$. Par un raisonnement analogue à celui réalisé dans l'exercice 5 (question 4), on montre que :

$$S_m = \frac{R}{4Lf}E_m \iff \boxed{L = \frac{RE_m}{4fS_m} = 13\,\mathrm{mH}}$$

Sur le second oscillogramme (BF), le signal d'entrée est un triangle d'amplitude $S_m = 4\,\mathrm{V}$. En sortie, le rectangle a une amplitude $S_m = 12,5\,\mathrm{mV}$. Lorsque la tension d'entrée est croissante, son coefficient directeur vaut $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{2E_m}{\frac{T}{2}} = \frac{4E_m}{T} = 4fE_m$. D'après le résultat de la question précédente, l'expression théorique de $s(t)$ est alors : $s(t) = 4RCfE_m$.

$$S_m = 4RCfE_m \iff \boxed{C = \frac{S_m}{4RfE_m} = 0,16\,\mu\mathrm{F}}$$

On en déduit la fréquence propre et le facteur de qualité :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 3,5\,\mathrm{kHz}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 2,9}$$