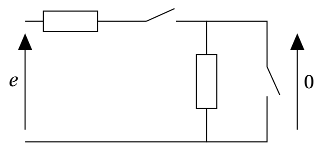
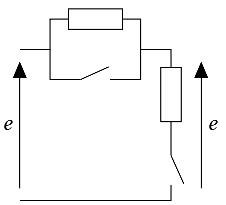
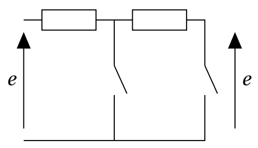
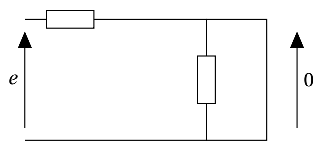
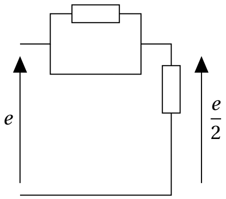
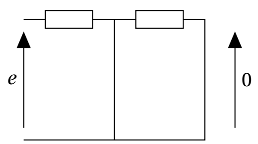
Corrigé DM15

Exercice : Filtrage analogique

1. Le filtre dont on a besoin doit transmettre les signaux de fréquence inférieure à 0,2 Hz et éliminer les signaux de fréquence supérieure à 1 Hz. Il doit donc s'agir d'un filtre **passe-bas**. On détermine la nature de chacun des filtres proposés en traçant le schéma équivalent en BF et HF.

Filtre	Filtre A	Filtre B	Filtre C
BF			
HF			
Nature	Passe-bande	Réjecteur de bande	Passe-bas

On conclut que c'est le **filtre C** qui convient pour cette application.

2. Ce filtre est un passe-bas du deuxième ordre. La forme canonique de la fonction de transfert est la suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On identifie la pulsation propre et le facteur de qualité :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\omega_0^2} = (RC)^2 \\ \dfrac{1}{Q\omega_0} = 3RC \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{3RC\omega_0} = \frac{1}{3}}$$

3. On simplifie la fonction de transfert en BF ($RC\omega \ll 1$) et HF ($RC\omega \gg 1$) :

$$\begin{cases} \underline{H} \overset{\text{BF}}{\simeq} 1 & \Longrightarrow G_{\text{dB}} = 0 \\ \underline{H} \overset{\text{HF}}{\simeq} -\dfrac{1}{(RC\omega)^2} & \Longrightarrow G_{\text{dB}} = -40\log(RC) - 40\log(\omega) \end{cases}$$

Il y a une asymptote horizontale en BF et une asymptote affine de pente $-40\,\text{dB/dec}$ en HF. **C'est cohérent avec l'allure du diagramme de Bode en gain**.

4. On calcule le gain pour une pulsation ω quelconque, puis à la pulsation ω_0 :

$$G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \quad \Longrightarrow \quad G(\omega_0) = Q$$

Le gain en décibels, à la pulsation ω_0, vaut : $G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log Q \simeq -9{,}5\,\text{dB}$ On lit sur le diagramme de Bode que le gain en décibels est égal à $-9{,}5\,\text{dB}$ à la fréquence : $\boxed{f_0 = 1{,}6\,\text{Hz}}$.

5. Il est difficile de lire précisément la valeur du gain en décibels sur le diagramme de Bode, à la fréquence $f = 0{,}2\,\text{Hz}$ (elle est quasiment confondue avec l'asymptote). On calcule plutôt le gain du filtre à cette fréquence à partir de l'expression littérale écrite à la question précédente.

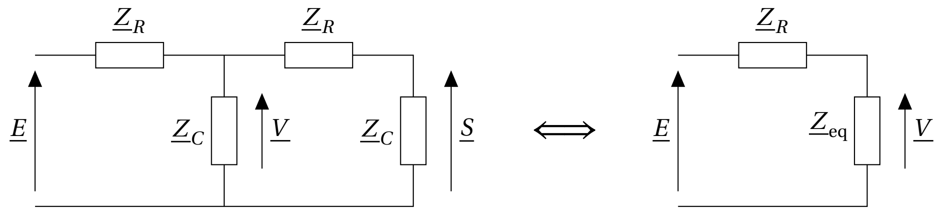
$$G(0{,}2\,\text{Hz}) = 0{,}95 \iff \boxed{A_p = 5\%}$$

On fait de même pour une fréquence de 1 Hz (même si, à cette fréquence, on pourrait également lire la valeur de G_{dB} sur le diagramme de Bode).

$$G(1\,\text{Hz}) = 0{,}51 \iff \boxed{A_p = 49\%}$$

Les signaux de fréquence inférieure à 0,2 Hz sont atténués de moins de 5% tandis que ceux de fréquence supérieure à 1 Hz sont atténués d'au moins 49% .

6. On effectue le calcul en deux étapes. On commence par simplifier le schéma du circuit avec des associations d'impédances pour déterminer la tension $\underline{V}$ à l'aide de la loi du pont diviseur de tension. On calcule ensuite $\underline{S}$ à l'aide d'une seconde loi du pont diviseur de tension.



L'admittance équivalente vaut : $\underline{Y}_{\text{eq}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_C} + \dfrac{1}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = jC\omega\,\dfrac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}$. On calcule $\underline{V}$:

$$\underline{V} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_R}\underline{E} = \frac{\underline{E}}{1 + \underline{Y}_{\text{eq}}\,\underline{Z}_R} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega\,\frac{2+jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

On calcule ensuite $\underline{S}$:

$$\underline{S} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{V} = \frac{1}{1 + jRC\omega}\,\frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega\,\frac{2+jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

$$= \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega + jRC\omega(2 + jRC\omega)}$$

$$= \frac{\underline{E}}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

On conclut que : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}}$.