

CHAPITRE

19

Forces centrales

Isaac Newton publia en 1687 l'un des textes scientifiques les plus importants de l'histoire : les "*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*". Il y énonce les lois du mouvement ainsi que la loi de la gravitation, puis il démontre en s'appuyant sur le raisonnement mathématique, que celles-ci permettent d'interpréter aussi bien la chute des corps que les observations astronomiques. L'un des succès les plus éclatants de la théorie de Newton fut la découverte de Neptune en 1846, dont la position fut prédite mathématiquement avant d'être effectivement observée à l'endroit attendu (on doit le calcul au français Urbain le Verrier, selon qui la présence de cette planète inconnue pouvait expliquer des anomalies dans l'orbite d'Uranus). L'œuvre de Newton constitua le fondement de toute la mécanique jusqu'au début du XX^{ème} siècle et reste encore aujourd'hui la théorie de référence dans la plupart des domaines.

Dans ce chapitre on montre comment appliquer les lois de la mécanique (PFD, TMC, TEM) pour étudier le mouvement des corps dans des *champs de force centrale conservatifs*. On traite ensuite essentiellement le cas particulier de la gravitation.

1 Propriétés générales du mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale conservatif

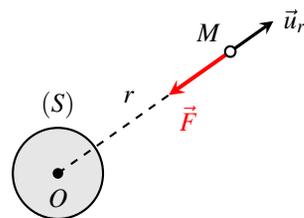
1.1 Champ de force centrale conservatif

1.1.1 Définition

Champ de force centrale conservatif

On considère un système (S) susceptible d'exercer une force $\vec{F}(\vec{r})$ sur un objet ponctuel situé dans son voisinage. On dit que cette force est centrale s'il existe un point O tel que l'expression générale de la force, dans un repère sphérique de centre O , est du type :

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{u}_r$$



Le point O s'appelle alors le *centre de force*. Dit autrement, une force est centrale si elle est **radiale** et que son intensité dépend **uniquement de la distance r par rapport au centre de force** (elle est indépendante de la direction autour de O).

Si, en plus de cela, la force dérive d'une énergie potentielle ($\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$) alors le champ de force centrale est dit *conservatif*.

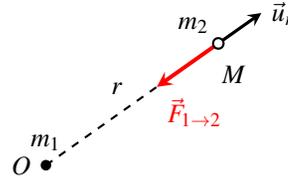
1.1.2 Interaction gravitationnelle

Force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles

La force gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 sur une autre masse ponctuelle m_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI la *constante gravitationnelle*. C'est une force centrale, dont l'intensité varie en $1/r^2$. Elle est **toujours attractive** (suivant $-\vec{u}_r$).



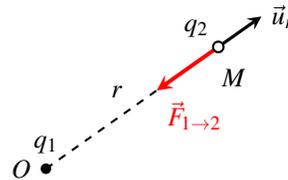
1.1.3 Interaction coulombienne

Force coulombienne entre deux charges ponctuelles

La force électrostatique (également appelée *force coulombienne*) exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ une constante fondamentale appelée *permittivité du vide*. C'est une force centrale, dont l'intensité varie elle aussi en $1/r^2$. Elle est attractive si les charges sont de signes opposés et répulsive si les charges sont de même signe.



Remarque : Les forces gravitationnelle et coulombienne ont une forme mathématique semblable (force centrale en $1/r^2$). On les range dans la catégorie des *forces newtoniennes*, c'est-à-dire du type :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad k = \begin{cases} -Gm_1m_2 & \text{(force gravitationnelle)} \\ \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} & \text{(force coulombienne)} \end{cases}$$

Remarque : Il existe d'autres forces centrales. Par exemple la force exercée par un ressort (raideur k , longueur à vide ℓ_0) fixé en O , sur son autre extrémité, vaut $\vec{F} = -k(r - \ell_0)\vec{u}_r$.

1.1.4 Énergie potentielle associée à une interaction newtonienne

En admettant qu'en coordonnées sphériques le gradient d'énergie potentielle associé à une force centrale s'écrit $\text{grad} E_p = \frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$, on montre rapidement qu'une force newtonienne est conservative et que son énergie potentielle s'écrit sous la forme : $E_p = \frac{k}{r} + \text{cste}$ (on choisit généralement la constante d'intégration égale à zéro).

Énergie potentielle gravitationnelle	Énergie potentielle coulombienne
$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$	$E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

1.2 Propriétés générales du mouvement

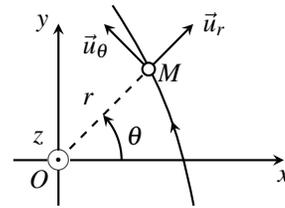
On énonce dans un premier temps les propriétés générales à connaître. On détaillera les démonstrations en s'appuyant sur un exercice d'application directe.

Propriété 1 : Conservation du moment cinétique

Soit M un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale, de centre O . **Le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ se conserve au cours du mouvement.**

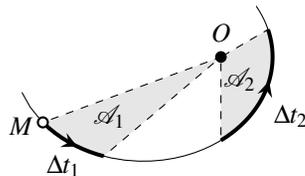
Propriété 2 : Planéité du mouvement

La trajectoire de M est **plane**, dans le plan qui contient le centre de force et est orthogonal à $\vec{L}_O(M)$. Par la suite on utilisera un repère cylindrique dont l'origine est au centre de force. La trajectoire de M est repérée en coordonnées polaires (r, θ) .



Propriété 3 : Lois des aires

Énoncé géométrique : Le vecteur \vec{OM} balaye des aires égales pendant des durées égales (voir figure ci-dessous).



$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \iff \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$$

Énoncé mathématique : Les coordonnées polaires du point M vérifient l'intégrale première du mouvement :

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{Cste}$$

La quantité C est appelée *constante des aires*. L'aire balayée par le vecteur \vec{OM} pendant un intervalle de temps Δt vaut : $\mathcal{A} = \frac{C}{2} \Delta t$.

Propriété 4 : Énergie potentielle effective

Si le champ de force est conservatif alors on peut lui associer une énergie potentielle $E_p(r)$ et **l'énergie mécanique E est constante**. Cela permet d'écrire une autre intégrale première du mouvement, sous la forme suivante :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

La fonction $E_{p,\text{eff}}(r)$ est appelée *énergie potentielle effective* du point matériel M . On peut s'appuyer sur son graphe pour déterminer les valeurs permises ou bien interdites pour le rayon r , selon la valeur de l'énergie mécanique E .

2 Nature de la trajectoire dans un champ gravitationnel

2.1 Position du problème, référentiel d'étude

Dans cette partie on s'intéresse spécifiquement au cas de l'interaction gravitationnelle entre un objet ponctuel S de masse m et un astre **beaucoup plus massif** : $M \gg m$. On admet que cette hypothèse nous permet de considérer, en première approximation, que le référentiel lié à l'astre attracteur est galiléen. Dans la majorité des exemples d'application que l'on traitera, l'objet est en orbite autour de la Terre ou bien du soleil.

Référentiel héliocentrique, référentiel géocentrique

Le *référentiel héliocentrique* est lié à un trièdre fictif dont l'origine est située au centre de masse du soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles lointaines (c'est-à-dire dans des directions que l'on peut supposer fixes du point de vue d'un observateur situé à l'intérieur du système solaire). Le référentiel héliocentrique est adapté à l'étude des orbites autour du soleil (planète, astéroïde, comète).

Le *référentiel géocentrique* est lié à un trièdre fictif dont l'origine est située au centre de masse de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Le référentiel géocentrique est adapté à l'étude des orbites autour de la Terre (satellite artificiel par exemple).

Remarque : Lorsque l'on veut étudier l'interaction gravitationnelle entre deux masses comparables (par exemple une étoile double), on se place généralement dans le référentiel lié au **centre de masse** des deux corps (appelé *référentiel barycentrique*).

Remarque : Si l'on souhaite étudier le déplacement du soleil sous l'effet de l'influence gravitationnelle des différentes planètes du système solaire (essentiellement Jupiter qui est la planète la plus massive), on peut se placer dans le *référentiel de Copernic*, lié à un trièdre fictif dont l'origine est située au centre de masse du système solaire et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique.

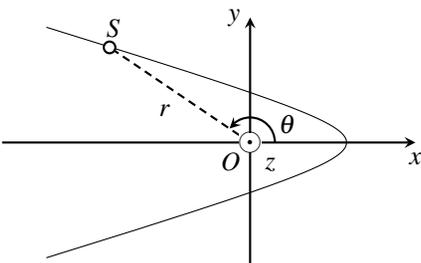
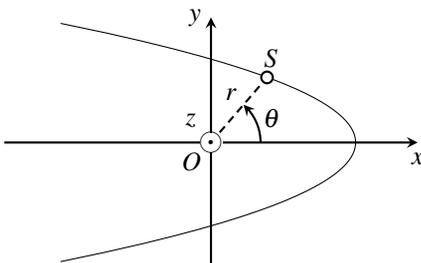
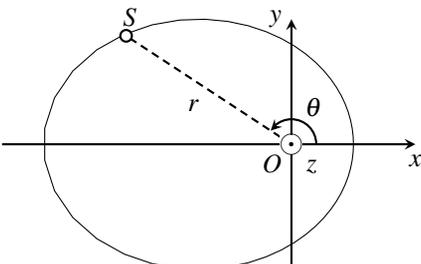
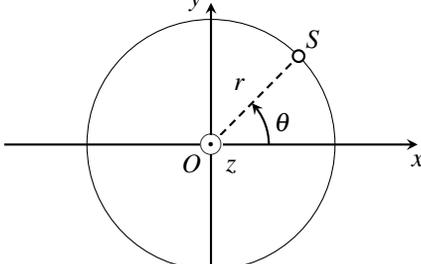
2.2 Différentes trajectoires possibles

2.2.1 Équation polaire de la trajectoire, excentricité

On admet que la trajectoire d'un corps dans un champ gravitationnel est une courbe dite *conique* dont le centre de force est l'un des *foyers*, d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec p le *paramètre* de la conique et e son *excentricité*. La définition du foyer d'une conique n'est pas à connaître. L'allure de la conique dépend de la valeur de l'excentricité.

$e > 1$: hyperbole	$e = 1$: parabole
	
$0 < e < 1$: ellipse	$e = 0$: cercle
	

Plus l'excentricité est proche de zéro et plus l'orbite ressemble à un cercle. À l'inverse plus l'excentricité s'approche de l'unité (par valeurs inférieures) et plus l'ellipse s'allonge. À titre d'exemple :

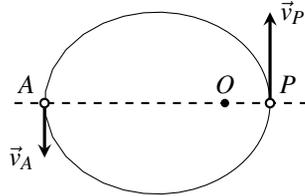
- L'orbite terrestre autour du soleil a une excentricité $e = 0,017$; elle est proche d'un cercle. Son périhélie est situé à 0,983 UA du soleil et son aphélie à 1,017 UA (UA est l'*unité astronomique* : 1 UA = 149 597 870 700 m exactement).
- l'orbite de la comète de Haley (dont la période de révolution autour du soleil est de 76 ans) a une excentricité $e = 0,97$; elle est très allongée. Son périhélie est situé à 0,59 UA du soleil et son aphélie à 35,3 UA.

2.2.2 Cas particulier de la trajectoire elliptique

Péricentre, apocentre

Le péricentre P est le point de l'ellipse le plus proche du centre de force. L'apocentre A est le plus éloigné.

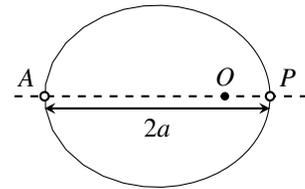
Dans le cas particulier d'une orbite solaire on parle de périhélie / aphélie et pour une orbite terrestre, de périgée / apogée.



Le péricentre et l'apocentre sont les deux seuls points de l'orbite pour lesquels la vitesse est **orthoradiale**. En effet en ces points r est minimal ou maximal donc $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. La loi des aires permet alors d'écrire une relation simple entre les rayons et les vitesses en A et P : $r_A v_A = r_P v_P$.

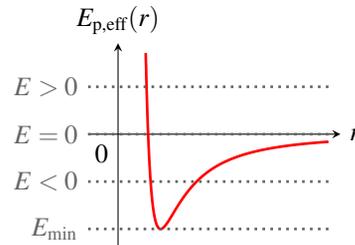
Demi-grand axe

La distance entre le péricentre et l'apocentre s'appelle le *grand axe* de l'ellipse. La demi-longueur du grand-axe, notée a , s'appelle le *demi-grand axe* de l'ellipse. Par définition on a donc : $r_A + r_P = 2a$.



2.3 Étude énergétique, état lié et état diffus

On trace sur la figure ci-contre le graphe d'énergie potentielle effective dans le cas de l'interaction gravitationnelle. Elle diverge lorsque $r \rightarrow 0$ (à cause du terme $\frac{mC^2}{2r^2}$), ce qui signifie qu'il y a une barrière de potentiel de hauteur infinie en $r = 0$. On conclut **que l'objet en orbite ne peut jamais atteindre le centre de force**.



État lié, état diffus

Il y a également une barrière de potentiel pour $r \rightarrow +\infty$, mais elle est de hauteur finie donc franchissable si l'énergie mécanique est suffisante :

- Le corps peut s'éloigner à l'infini du centre de force si $E \geq 0$. On dit alors qu'il est dans un **état diffus** (ou état de diffusion).
- Le rayon est borné si $E < 0$, ce qui signifie que le corps demeure indéfiniment au voisinage du centre de force. On dit alors qu'il est dans un **état lié**.

Ainsi, la nature de la trajectoire dépend de la valeur de l'énergie mécanique. On a mis en évidence, sur le graphe d'énergie potentielle effective, quatre cas de figure différents, qui correspondent aux quatre types de trajectoires possibles.

Énergie	$E > 0$	$E = 0$	$E_{\min} < E < 0$	$E = E_{\min}$
Trajectoire	Hyperbole	Parabole	Ellipse	Cercle
État	Diffus	Diffus	Lié	Lié

2.4 Vitesse de libération

On a vu qu'un corps qui possède une énergie mécanique suffisante peut se libérer du champ d'attraction gravitationnelle d'un astre (c'est-à-dire s'en éloigner à l'infini). Il faut pour cela qu'il se trouve dans un état diffus.

Vitesse de libération d'un astre

On appelle *vitesse de libération d'un astre* la vitesse minimale avec laquelle il faut propulser un corps depuis la surface de cet astre pour qu'il puisse s'en éloigner définitivement. Dans le cas d'un astre sphérique de rayon R et de masse M , la condition $E \geq 0$ permet d'obtenir une expression simple de cette vitesse de libération :

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

2.5 Application

Exemple

La sonde Juno, lancée en 2011 depuis la Terre, est prévue pour rester en orbite autour de Jupiter jusqu'en 2025. Elle a comme mission principale de collecter des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution. La sonde devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une orbite elliptique de 53 jours et à rallonger la mission.

On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J . On effectue l'étude dans le référentiel jupiterocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ où O est le centre de Jupiter.

1. On suppose que le référentiel héliocentrique est galiléen. Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique sachant qu'une année jovienne est environ égale à douze années terrestres.

2. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ est constant. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la **figure 1**. Le vecteur unitaire \vec{u}_z est choisi colinéaire et de même sens que \vec{L}_O .

3. Déterminer les expressions du vecteur position \vec{r} et du vecteur vitesse \vec{v} dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

4. On définit le vecteur \vec{C} par $\vec{C} = \frac{\vec{L}_O}{m}$. En exprimant \vec{C} dans la base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$.

5. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G \frac{mM_J}{r}.$$

Justifier que \mathcal{E}_m se conserve.

6. Tracer l'allure de $U_{\text{eff}}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de \mathcal{E}_m . On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le " lancer " vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il " s'échappe ".

7. Déterminer littéralement puis numériquement la vitesse de libération v_ℓ .

Données : constante de la gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, masse de la Terre $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, rayon de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$.

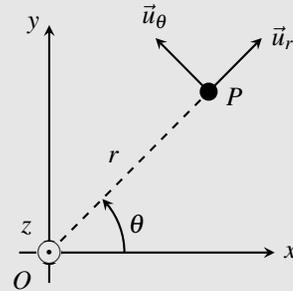
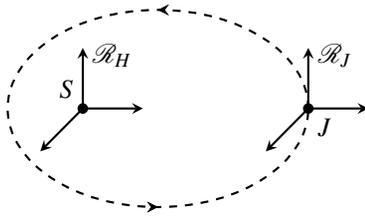


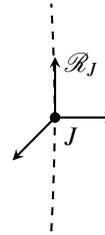
Figure 1 – Paramétrage cylindrique

► **Étudier le mouvement relatif de deux référentiels**

1. Le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_H est supposé galiléen, donc **tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_H est également galiléen** (voir chapitre 8). En pratique Jupiter a un mouvement elliptique autour du soleil, mais puisque la période de révolution de Juno (53 jours) est très faible comparée à l'année jovienne (12 ans), on peut considérer qu'à cette échelle de temps le déplacement de Jupiter par rapport au soleil est quasiment rectiligne et uniforme (elle a parcouru une très petite portion de son orbite elliptique, voir figure ci-dessous). On conclut que pour étudier le mouvement de Juno autour de Jupiter, **on peut faire l'approximation que le référentiel jupiterocentrique est galiléen**.



Orbite de Jupiter
autour du soleil



Déplacement de Jupiter sur une
échelle de quelques dizaines de jours

► **Justifier la planéité du mouvement**

2. Juno est soumise uniquement à la force gravitationnelle \vec{F}_g exercée par Jupiter. On applique le théorème du moment cinétique à la sonde, par rapport à O , dans le référentiel jupiterocentrique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}_g) = r\vec{u}_r \wedge \left(-G \frac{mM_J}{r^2} \vec{u}_r \right) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \vec{Cste}}$$

Le moment cinétique $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ est constant, or à tout instant $\vec{r} = \vec{OP}$ est orthogonal à \vec{L}_O d'après les propriétés du produit vectoriel. On en déduit que le mouvement de la sonde est contenu **dans le plan orthogonal à \vec{L}_O passant par O** .

► **Exprimer les vecteurs cinématiques**

3. Dans la base polaire le vecteur position et le vecteur vitesse s'écrivent :

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{u}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

► **Démontrer la loi des aires**

4. On projette \vec{C} dans la base cylindrique :

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = r\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{C} = r^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

Le moment cinétique \vec{L}_O est constant donc \vec{C} aussi. On conclut que $\boxed{C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z = r^2\dot{\theta} = \text{Cste}}$.

► **Calculer une énergie potentielle effective**

5. On exprime l'énergie cinétique de P en fonction des coordonnées polaires :

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

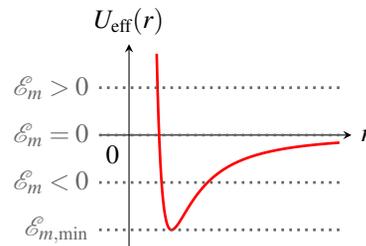
La loi des aires permet d'écrire : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, d'où : $\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2}$. L'énergie potentielle de la sonde vaut $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -G\frac{mM_J}{r}$. On exprime finalement l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{cin}} + \mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{mM_J}{r} \implies \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)}$$

L'unique force \vec{F}_g qui s'exerce sur la sonde est **conservative** donc l'énergie mécanique \mathcal{E}_m est **constante**.

► **Décrire la nature des trajectoires possibles**

6. On trace ci-contre l'allure de $U_{\text{eff}}(r)$. La trajectoire de la sonde est une conique dont le centre de force O est l'un des foyers. Pour déterminer la nature de cette conique, on détermine quelles sont les valeurs de rayon r permises, selon la valeur de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m .



- si $\mathcal{E}_m < 0$ le rayon r est borné. La sonde n'a pas l'énergie suffisante pour se libérer de l'attraction gravitationnelle de Jupiter ; elle est dans un **état lié**. La trajectoire est **elliptique**, sauf dans le cas particulier où \mathcal{E}_m est minimale. Il n'y a alors qu'une seule valeur de r permise et la trajectoire est **circulaire**.
- si $\mathcal{E}_m \geq 0$, le rayon r n'a pas de borne supérieure. La sonde passe à proximité de Jupiter puis s'en éloigne définitivement ; elle est dans un état **diffus**. La trajectoire est **hyperbolique** si $\mathcal{E}_m > 0$ et **parabolique** dans le cas particulier $\mathcal{E}_m = 0$.

► **Calculer une vitesse de libération**

7. On travaille désormais dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Comme pour l'étude du mouvement de Juno on suppose que l'objet est soumis uniquement à la force gravitationnelle terrestre d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -G\frac{mM_T}{r}$. À l'instant où l'objet est lancé depuis la surface de la Terre ($r = R_T$), avec une vitesse v_0 , l'énergie mécanique vaut :

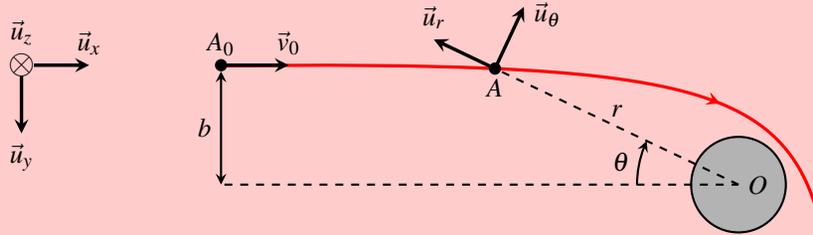
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T}$$

L'objet échappe au champ gravitationnel terrestre à condition d'être dans un état diffus. La condition vérifiée par la vitesse de lancer est la suivante :

$$\mathcal{E}_m \geq 0 \iff \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} \geq 0 \iff \boxed{v_0 \geq v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Application 1

Un astéroïde A de masse m , lancé depuis le point A_0 avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, passe au voisinage de la Terre (centre O , masse M , rayon R). On appelle *paramètre d'impact* (noté b) la distance entre la direction initiale de l'astéroïde et la Terre. Le point A_0 peut être choisi arbitrairement éloigné de la Terre, de sorte que l'on assimilera l'énergie potentielle en A_0 à sa valeur à l'infini. On pose $a = \frac{GM}{v_0^2}$.



1. Justifier que le moment cinétique $\vec{L}_O(A)$ se conserve, puis que la grandeur $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante. Démontrer enfin que $C = bv_0$.
2. Justifier que l'énergie mécanique se conserve, puis qu'elle s'exprime sous la forme : $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$, avec $E_{p,\text{eff}}(r)$ à exprimer en fonction des données.
3. Que vaut E pour cet astéroïde ? En déduire la nature de la trajectoire.
4. En utilisant les résultats des questions 2 et 3, montrer que le rayon r_p du périhélie est solution de l'équation : $r^2 + 2ar - b^2 = 0$. Exprimer r_p en fonction de a et b .
5. A.N. : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I., $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $v_0 = 2,0$ km \cdot s $^{-1}$, $b = 1,4 \cdot 10^5$ km. Calculer r_p . L'astéroïde entre-t-il en collision avec la Terre ?

3 État lié dans un champ gravitationnel

3.1 Lois de Kepler

Les trois lois énoncées par Johannes Kepler entre 1609 et 1618 (s'appuyant entre autres sur les relevés astronomiques remarquablement précis du danois Tycho Brahe), s'appliquent aux planètes du système solaire. Cependant on peut les généraliser à tout objet soumis à l'attraction gravitationnelle d'un seul autre astre, beaucoup plus massif, et qui se trouve dans un état lié.

1^{ère} loi : loi des orbites

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.

2^{ème} loi : loi des aires

Les planètes balayent, sur leur orbite autour du soleil, des aires égales pendant des durées égales (voir paragraphe 1.2).

3^{ème} loi : loi des périodes

Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe a de sa trajectoire elliptique : $\frac{T^2}{a^3} = \text{Cste.}$

Non seulement Newton démontra que sa théorie était compatible avec les lois de Kepler, mais il proposa en plus l'expression de la constante de proportionnalité pour la troisième loi :

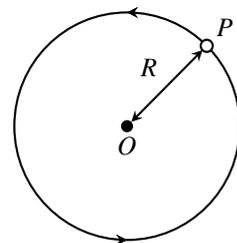
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}$$

avec m la masse de la planète et M celle du soleil. Dans le cas particulier qui nous intéresse dans ce chapitre : $m \ll M$ (et qui convient assez bien pour les planètes du système solaire), on peut faire l'approximation suivante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

3.2 Orbite circulaire

L'orbite circulaire est la plus simple à étudier car le rayon et la vitesse sont constants. Pour une orbite de rayon R donné, vous devez principalement savoir calculer la vitesse, retrouver la troisième loi de Kepler et exprimer l'énergie mécanique.

**En résumé**

- Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour trouver l'expression de la vitesse orbitale ;
- Exprimer la période à partir de la vitesse et du périmètre de l'orbite, puis retrouver la troisième loi de Kepler ;
- Exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et en déduire l'énergie mécanique.

Exemple

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S de masse m , en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre (centre O , masse M_T , rayon R_T). On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Déterminer la vitesse v puis la période orbitale T du satellite. Retrouver la troisième loi de Kepler. AN : Les satellites de navigation GPS se trouvent sur une orbite d'altitude $h = 20\,200$ km. Calculer v et T .
2. Un satellite *géostationnaire* est fixe dans le référentiel terrestre. Justifier que l'orbite géostationnaire est nécessairement contenue dans le plan de l'équateur, puis déterminer l'altitude de cette orbite.
3. Exprimer l'énergie mécanique du satellite et commenter son signe.
4. Déterminer littéralement et numériquement la *vitesse de satellisation* v_{sat} , c'est-à-dire la vitesse minimale avec laquelle il faut lancer un objet depuis la surface de la Terre pour le placer sur une orbite circulaire.

L'envoi d'un satellite en orbite nécessite une grande quantité d'énergie, donc de carburant. On peut toutefois exploiter l'entraînement lié au mouvement de rotation de la Terre sur elle-même pour réduire le coût énergétique d'un lancer.

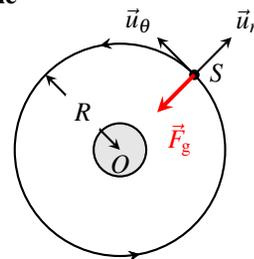
5. En quels lieux de la surface la vitesse d'entraînement due à la rotation de la Terre est-elle maximale ? Calculer la vitesse d'entraînement maximale v_m et comparer à v_{sat} . Commenter.

Donnée : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$, durée du jour sidéral : $T_{\text{sid}} = 86\,164 \text{ s}$.

► **Mettre en œuvre le PFD pour déterminer une vitesse orbitale**

1. On représente schématiquement la situation dans le référentiel géocentrique. On note \vec{F}_g la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite. On mène l'étude dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite :

$$m\vec{a} = \vec{F}_g = -\frac{GmM_J}{R^2}\vec{u}_r$$



Pour un mouvement circulaire l'accélération s'écrit $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$ avec $v = R\dot{\theta}$ la vitesse. On projette le PFD sur \vec{u}_r :

$$-\frac{mv^2}{R} = -\frac{GmM_J}{r^2} \iff v = \sqrt{\frac{GM_J}{R}}$$

► **Retrouver la troisième loi de Kepler pour une orbite circulaire**

Pendant la durée T d'une révolution le satellite parcourt à la vitesse constante v une distance égale au périmètre de l'orbite $2\pi R$.

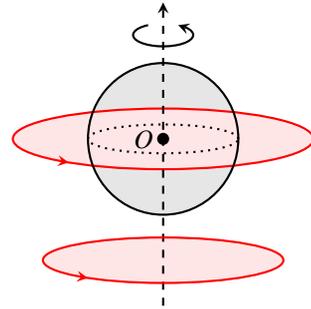
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_J}} \iff \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}}$$

Le rayon de l'orbite d'un satellite GPS vaut $R = h + R_T = 2,66 \cdot 10^4$ km. On trouve alors $\boxed{v = 3,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$ et $\boxed{T = 11 \text{ h } 58 \text{ min}}$.

► **Déterminer les propriétés de l'orbite géostationnaire**

2. Dans le référentiel géocentrique, la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, avec une période égale par définition au **jour sidéral**. Pour qu'un point soit fixe par rapport à la Terre, il doit nécessairement tourner autour de l'axe des pôles à la même vitesse angulaire que la Terre.

Par conséquent le mouvement doit être un cercle centré sur l'axe des pôles, avec une période orbitale exactement égale au jour sidéral (on montre deux exemples sur la figure ci-contre).



Cependant, par conservation du moment cinétique \vec{L}_O , une orbite terrestre s'effectue nécessairement **dans un plan qui contient le centre de force O** (voir démonstration dans le paragraphe 2.5). On conclut que l'orbite géostationnaire se situe obligatoirement **dans le plan équatorial**.

Le rayon de l'orbite géostationnaire est celui pour lequel la période de révolution est exactement égale à T_{sid} . On le détermine grâce à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_{\text{sid}}^2}{R_{\text{géo}}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff R_{\text{géo}} = \left(\frac{GM_T T_{\text{sid}}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

L'altitude de l'orbite géostationnaire vaut : $\boxed{h_{\text{géo}} = R_{\text{géo}} - R_T = 3,6 \cdot 10^4 \text{ km}}$.

► **Déterminer l'énergie mécanique pour une orbite circulaire**

L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_T}{2R}$ et l'énergie potentielle : $E_p = -\frac{GmM_T}{R}$. On en déduit l'énergie mécanique du satellite :

$$\boxed{E = E_c + E_p = -\frac{GmM_T}{2R}}$$

L'énergie mécanique est strictement négative. C'est logique puisqu'une orbite circulaire correspond à un **état lié** du satellite.

► **Déterminer la vitesse de satellisation terrestre**

L'énergie mécanique associée à une orbite circulaire est une fonction croissante du rayon, c'est-à-dire que plus le rayon est élevé et plus l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour le placer sur cette orbite est importante. L'orbite qui demande le moins d'énergie possible est donc celle qui a le plus petit rayon, c'est-à-dire une orbite **rasante** de rayon $R \simeq R_T$. L'énergie mécanique minimale vaut $E_{\min} = -\frac{GmM_T}{2R_T}$. Sachant que le satellite est lancé depuis la surface de la terre ($r = R_T$) avec la vitesse v_{sat} , on peut écrire :

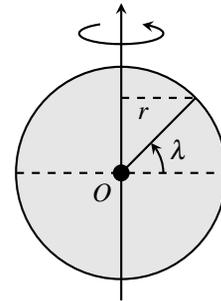
$$E_{\min} = -\frac{GmM_T}{2R_T} = \frac{1}{2}mv_{\text{sat}}^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \iff v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

► **Justifier la position optimale d'une base spatiale à la surface de la Terre**

5. Dans le référentiel géocentrique, un point de la surface terrestre de latitude λ est en mouvement circulaire de rayon $r = R_T \cos \lambda$, à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}}$. La vitesse d'entraînement vaut :

$$v_e = r\dot{\theta} = \frac{2\pi R_T}{T_{\text{sid}}} \cos \lambda$$

Elle est maximale lorsque $\cos \lambda = 1 \iff \lambda = 0$. Pour bénéficier au maximum de l'entraînement dû à la rotation de la Terre, il faut lancer un satellite depuis un point **du plan équatorial**.



La vitesse d'entraînement maximale vaut $v_m = \frac{2\pi R_T}{T_{\text{sid}}} = 0,47 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle correspond à 6% de v_{sat} , ce n'est pas négligeable. **La situation géographique d'une base spatiale a un véritable impact sur la dépense énergétique nécessaire au lancement.**

Application 2

Un atome d'hydrogène est constitué d'un noyau formé d'un unique proton (masse m_p , charge e) et d'un électron (masse m_e , charge $-e$). On néglige toute autre interaction que celle entre les deux charges.

1. Comparer la force gravitationnelle et la force coulombienne qui s'exercent entre ces deux particules. Conclure.
2. Justifier que l'on peut négliger le déplacement du proton comparé à celui de l'électron (pour cette question on se place dans le référentiel \mathcal{R}^* lié au centre de masse des deux particules, supposé galiléen).

On se place désormais dans le référentiel lié au proton, que l'on suppose galiléen. L'électron suit une orbite circulaire de rayon $r_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ autour du proton.

3. Calculer la vitesse de l'électron sur cette trajectoire. Peut-on considérer qu'un modèle non relativiste est pertinent pour décrire l'évolution de l'électron ?

4. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron. Calculer l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'électron pour qu'il s'éloigne à l'infini du proton. On donnera la valeur en électron-volts.
5. On montre en électromagnétisme classique qu'une charge animée d'un mouvement périodique de fréquence f rayonne une onde électromagnétique de même fréquence. Calculer la fréquence de l'onde électromagnétique associée, en déduire la longueur d'onde correspondante. À quel domaine spectral cela correspond-il ?

Données : $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$,
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

3.3 Orbite elliptique

Il y a deux relations essentielles à retenir pour étudier le mouvement elliptique d'un corps de masse m autour d'un astre de masse $M \gg m$. La première relie l'énergie mécanique au demi-grand axe de la trajectoire, la seconde est la troisième loi de Kepler.

$$E = -\frac{GmM}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

On note qu'elles sont semblables au cas circulaire, à condition de remplacer le rayon R par le demi-grand axe a . La troisième loi de Kepler est admise pour les orbites elliptiques, en revanche il est assez simple de démontrer la relation entre l'énergie mécanique et le demi-grand axe.

Application 3

Un objet S de masse m est en orbite autour d'un astre sphérique de centre O et de masse $M \gg m$. On se place dans le référentiel lié à l'astre, supposé galiléen. On étudie le mouvement dans le repère polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On note $C = r^2 \dot{\theta}$ la constante des aires.

1. Montrer que les rayons r_A et r_P de l'apocentre et du péricentre sont solutions d'une équation du second degré. On utilisera un raisonnement semblable à celui de l'application 1.

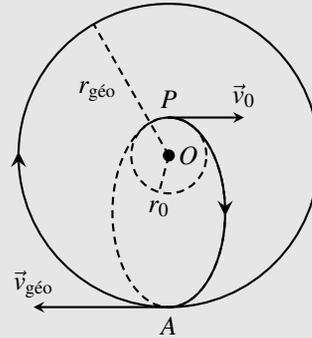
2. Exprimer r_A et r_P et en déduire que : $E = -\frac{GmM}{2a}$.

En général les exercices d'application directe sur les orbites elliptiques reposent sur les deux relations ci-dessus, la première permettant de relier la taille de l'orbite à l'énergie mécanique, la seconde permettant de déterminer la période de révolution, une fois que l'on connaît le demi-grand axe.

Exemple

Un satellite artificiel de la Terre (de centre O , de masse M) de masse m se trouve sur une orbite circulaire de rayon $r_0 = 6700$ km (altitude de 300 km).

1. Calculer la vitesse v_0 de ce satellite dans le référentiel géocentrique.
2. Calculer le rayon $r_{\text{géo}}$ d'une orbite géostationnaire ainsi que la vitesse $v_{\text{géo}}$ d'un satellite sur cette orbite.



On souhaite faire passer ce satellite de son orbite initiale à l'orbite géostationnaire. Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périhélie P est à la distance r_0 et l'apogée A à la distance $r_{\text{géo}}$ du centre de la Terre. Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage des moteurs du satellite en modifiant sa vitesse (instantanément). Au point P , la vitesse du satellite passe de v_0 à v_P . Au point A , la vitesse du satellite passe de v_A à $v_{\text{géo}}$.

3. Donner l'expression de l'énergie mécanique sur chacune des trois orbites.
4. Calculer la vitesse v_P et en déduire la variation de vitesse nécessaire pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert : $\Delta v_P = v_P - v_0$.
5. Calculer la vitesse v_A et en déduire la variation de vitesse nécessaire pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire : $\Delta v_A = v_{\text{géo}} - v_A$.
6. Calculer la durée T du voyage sur l'orbite de transfert.

Données : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI , $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, jour sidéral : $T_{\text{sid}} = 86\,164$ s

► **Étudier un mouvement circulaire**

1. La vitesse du satellite sur l'orbite basse vaut : $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = 7,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (voir exemple du paragraphe 3.2 pour les démonstrations).

► **Déterminer le rayon de l'orbite géostationnaire**

2. La période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à la durée du jour sidéral (voir paragraphe 3.2). On détermine le rayon de l'orbite géostationnaire grâce à la troisième loi de Kepler :

$$r_{\text{géo}} = \left(\frac{GMT_{\text{sid}}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

La vitesse du satellite sur l'orbite géostationnaire vaut : $v_{\text{géo}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\text{géo}}}} = 3,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

► **Relier l'énergie mécanique au demi-grand axe d'une orbite elliptique**

3. Sur les orbites circulaires les énergies mécaniques valent :

$$E_0 = -\frac{GmM}{2r_0} \quad \text{et} \quad E_{\text{géo}} = -\frac{GmM}{2r_{\text{géo}}}$$

D'après la figure le grand axe de l'ellipse de transfert (distance AP) vaut : $2a = r_0 + r_{\text{géo}}$. On en déduit l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert :

$$E_t = -\frac{GmM}{2a} = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}}$$

► **Exploiter la conservation de l'énergie mécanique**

4. L'énergie mécanique se conserve sur l'orbite de transfert, elle a la même valeur E_t au point P et au point A . On en déduit que :

$$E_t = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GmM}{r_0} \iff v_P = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + r_{\text{géo}}} \right)} = 10,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

La variation de vitesse au point P vaut : $\Delta v_P = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. On raisonne de la même manière au point A :

$$E_t = -\frac{GmM}{r_0 + r_{\text{géo}}} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_{\text{géo}}} \iff v_A = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_{\text{géo}}} - \frac{1}{r_0 + r_{\text{géo}}} \right)} = 1,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

La variation de vitesse au point A vaut : $\Delta v_A = 1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

► **Mettre en œuvre la troisième loi de Kepler**

6. Le voyage entre P et A correspond exactement à la moitié d'une révolution sur l'ellipse de transfert donc la durée T du voyage est égale à la moitié de la période orbitale T_r . On détermine T_r grâce à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_r^2}{\left(\frac{r_0 + r_{\text{géo}}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \iff T_r = \pi \sqrt{\frac{(r_0 + r_{\text{géo}})^3}{2GM}}$$

On conclut que : $T = \frac{T_r}{2} = \pi \sqrt{\frac{(r_0 + r_{\text{géo}})^3}{8GM}} = 5 \text{ h } 15 \text{ mn}$.

Application 4

Un satellite de masse m est en orbite autour de la Terre, de masse $M \gg m$ et de centre O , sur une orbite circulaire de rayon r_0 .

1. Exprimer la vitesse v_0 , la période T_0 et l'énergie mécanique E_0 du satellite.

À un instant donné la vitesse du satellite passe brutalement de v_0 à $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, sans changement de direction.

2. Justifier que la nouvelle trajectoire est elliptique. Déterminer son demi-grand axe. Tracer sur la même figure l'ancienne et la nouvelle orbite.

3. Déterminer le rayon r_P et la vitesse v_P au péricentre.

4. On note T la nouvelle période de révolution. Calculer T/T_0 .