CHAPITRE 20 Solides en rotation

Le balancier d'une horloge à pendule, la turbine d'une centrale électrique, le rotor d'un moteur électrique ou d'un alternateur, sont autant de systèmes mécaniques dont le mouvement de rotation ne peut être décrit à l'aide des lois de la mécanique du point. Il est nécessaire d'introduire un formalisme nouveau pour décrire la rotation d'un solide. Dans ce chapitre on se place dans un cadre simple, celui d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

1 Cinématique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

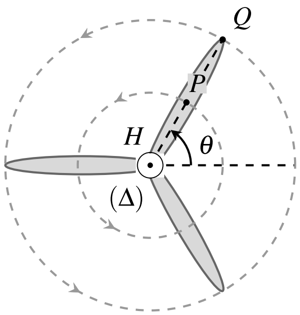
1.1 Définition

Vitesse angulaire de rotation

Si un solide (S) est en rotation autour de l'axe (Δ) fixe dans le référentiel $(\mathscr{R})$ alors tout les point de (S) possèdent dans un $(\mathscr{R})$ **un mouvement circulaire centré sur** (Δ) et ont en commun **la même vitesse angulaire** $\omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, appelée *vitesse angulaire de rotation* du solide.

On note que si tous les points de (S) ont la même vitesse angulaire (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$), il n'ont en revanche pas tous la même vitesse linéaire (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$). Pour un point en mouvement circulaire de rayon r, la vitesse linéaire s'écrit $v = r\omega$, donc **à vitesse angulaire constante les points les plus éloignés de l'axe ont une vitesse linéaire plus élevée que ceux qui sont plus près de l'axe**.

Par exemple, le point Q a ici la même vitesse angulaire que le point P, mais une vitesse linéaire plus élevée.



1.2 Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Expression du moment cinétique

Le moment cinétique scalaire d'un solide (S) en rotation autour d'un axe orienté fixe (Δ) s'écrit :

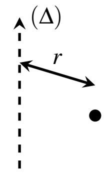
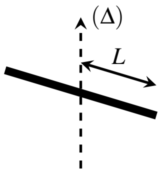
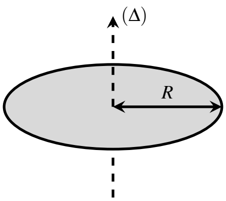
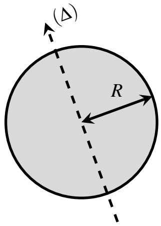
$$\boxed{L_\Delta(S) = J_\Delta \omega}$$

avec ω la vitesse angulaire de rotation **algébrique** du solide et J_Δ le *moment d'inertie* du solide par rapport à (Δ) (en $\mathrm{kg \cdot m^2}$).

<u>Remarque</u> : Le sens de rotation positif est imposé par l'orientation de (Δ) ; on le trouve en utilisant la règle de la main droite. Le pouce de la main droite étant orienté dans le sens de (Δ), l'inclinaison des autres doigts donne le sens de rotation positif. Par exemple on peut vérifier que sur la figure ci-dessus, l'angle θ est défini dans le sens positif compte tenu de l'orientation de (Δ).

1.3 Moment d'inertie

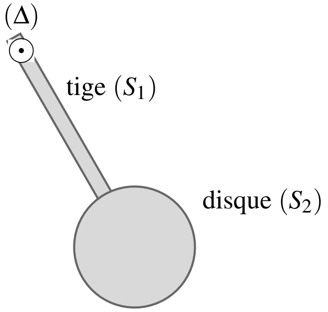
Le moment d'inertie d'un solide dépend de sa masse mais également de la distance entre cette masse et l'axe de rotation (voir exemples ci-dessous). Seule l'expression du moment d'inertie d'une masse ponctuelle est à retenir. Pour tout autre solide l'expression sera fournie.

Masse ponctuelle	Tige homogène	Disque homogène	Boule homogène
			
$J_\Delta = mr^2$	$J_\Delta = \dfrac{mL^2}{3}$	$J_\Delta = \dfrac{mR^2}{2}$	$J_\Delta = \dfrac{2mR^2}{5}$

Si l'on réunit deux solides (S_1) et (S_2) pour former un nouveau solide (S) alors les moments d'inertie s'additionnent :

$$J_\Delta(S) = J_\Delta(S_1) + J_\Delta(S_2)$$

On illustre avec le pendule ci-contre, susceptible de tourner autour de l'axe (Δ), constitué d'une tige et d'un disque solidaires entre eux (ils sont fixes l'un par rapport à l'autre). Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation est égal à $J_\Delta(\text{tige}) + J_\Delta(\text{disque})$.



> On rappelle que la masse m quantifie l'inertie d'un solide que l'on veut mettre en translation. Plus la masse est élevée et plus il faut exercer une force F importante pour donner au solide une accélération a donnée.
>
> Le moment d'inertie J_Δ quantifie quant à lui l'inertie d'un solide que l'on veut mettre en rotation autour d'un axe (Δ). Plus le moment d'inertie est élevé et plus il faut exercer un moment de force $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F})$ important pour donner au solide une accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ donnée. Le moment d'inertie dépend de la masse, mais également de la distance à l'axe. Cela signifie qu'il est d'autant plus difficile de mettre en rotation un solide de masse m, que cette masse est éloignée de l'axe de rotation.

2 Dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

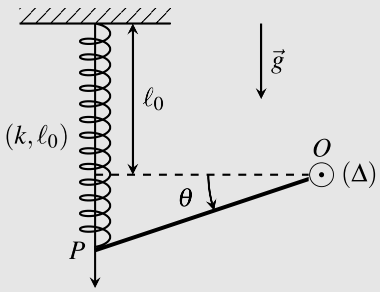
2.1 Moment de force scalaire, point d'application d'une force

Dans ce chapitre les moments (cinétique ou de force) seront toujours mesurés par rapport à un axe de rotation orienté fixe (Δ), par conséquent il s'agira **exclusivement de moments scalaires**.

> On a vu au chapitre 18 comment calculer un moment de force scalaire à l'aide du bras de levier. En dynamique du solide, les forces extérieures peuvent s'appliquer en des points différents du système, c'est pourquoi il est très important, au moment de réaliser le bilan des forces, de **situer précisément leur point d'application**.

Exemple

Une tige homogène de masse m et longueur L est fixée à son extrémité O à un axe horizontal (Δ) autour duquel elle peut pivoter sans frottement. À l'autre extrémité P elle est attachée à un ressort élastique de raideur k et longueur à vide ℓ_0. La position angulaire de la tige est mesuré par l'angle θ représenté sur la figure ci-contre. On suppose que θ est suffisamment faible pour supposer que le ressort est toujours vertical. Le ressort est dans son état naturel lorsque la tige est horizontale ($\theta = 0$).



Effectuer le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur la tige et exprimer leur moment par rapport à (Δ).

► **Effectuer le bilan des forces extérieures, identifier les points d'application**

Point d'application d'une force

De façon pratique on retient ces deux cas de figure :

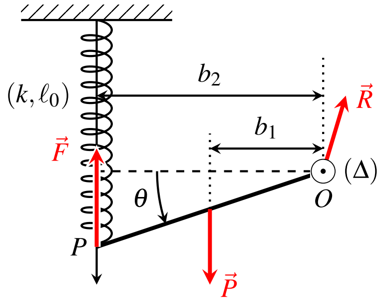
- Le poids s'applique **au centre d'inertie** du solide. Quand le solide est homogène et de forme simple (tige rectiligne, disque, cylindre, sphère), le centre d'inertie se confond avec le centre géométrique.
- Une force de contact (réaction, tension d'un fil, force de rappel d'un ressort) s'applique **au point de contact**.

La tige est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale de l'axe $\vec{R}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$. Comme la tige est homogène le poids s'applique en son centre. On représente en page suivante les différentes forces et leur point d'application.

► **Calculer un moment de force scalaire à l'aide du bras de levier**

La réaction $\vec{R}$ s'applique en un point de (Δ) donc son bras de levier est nul : $\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0}$.

Le centre de la tige est à la distance $\frac{L}{2}$ de (Δ). On trouve alors que le bras de levier du poids vaut : $b_1 = \frac{L}{2}\cos\theta$. La règle de la main droite indique que $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P})$ est positif. On conclut :



$$\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = +b_1\|\vec{P}\| = \frac{1}{2}mgL\cos\theta}$$

Par un raisonnement analogue on exprime le bras de levier de la force de rappel : $b_2 = L\cos\theta$. Dans cette position où θ est positif le ressort est étiré et son allongement vaut $\ell - \ell_0 = L\sin\theta$. La norme de la force de rappel est donc égale à $kL\sin\theta$. La règle de la main droite indique cette fois-ci que $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F})$ est négatif.

$$\boxed{\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = -b_2\|\vec{F}\| = -kL^2\cos\theta\sin\theta}$$

Remarque : On peut montrer que cette expression reste vraie si θ est négatif.

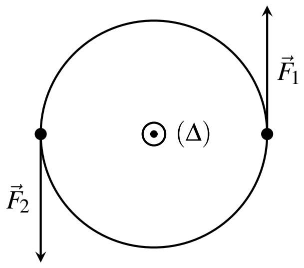
Remarque : Puisque l'angle θ est supposé faible on peut simplifier ces expressions au premier ordre : $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{1}{2}mgL$ et $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = -kL^2\theta$.

2.2 Couple de forces

Couple de forces

Un couple de forces est un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment résultant par rapport à un axe orienté, noté Γ et appelé *couple*, est non nul.

$\boxed{\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}}$ et $\boxed{\sum_k \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_k) = \Gamma \neq 0}$



Il est possible de mettre un solide en rotation à l'aide d'une seule force, mais cela risque de produire des contraintes mécaniques importantes au niveau de la liaison (poignée de porte, manivelle). On utilise généralement un couple de forces lorsque l'on veut mettre un solide en rotation autour d'un axe, en minimisant les contraintes mécaniques au niveau de la liaison. C'est par exemple le cas avec les moteurs électriques rotatifs (lave-linge, vélo à assistance électrique, ventilateur).

2.3 Liaison pivot

Liaison pivot réelle et idéale

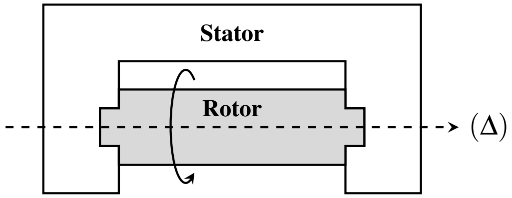
On appelle *liaison* toute contrainte mécanique entre deux solides qui permet un déplacement relatif des deux pièces tout en bloquant certains degrés de liberté de translation et/ou de rotation.

Une *liaison pivot* interdit toute translation et autorise un seul degré de liberté de rotation. Autrement dit, un solide relié à un axe par une liaison pivot peut uniquement **pivoter autour de cet axe** (exemple : pales d'une éolienne, roue d'une cage à hamster).

En pratique il existe toujours des frottements au niveau de la liaison puisqu'il y a contact entre des pièces mécaniques. Ces actions de contact produisent alors un **couple de frottement** qui s'oppose à la rotation (moment $\mathscr{M}_\Delta$(liaison) de signe opposé à la vitesse angulaire de rotation ω). Il est possible de limiter ces frottements à l'aide d'une lubrification ou bien de roulements. On parle de *liaison pivot idéale* lorsque l'on néglige le moment des actions de contact : $\mathscr{M}_\Delta(\text{liaison}) = 0$.

Rotor, stator

Dans un système rotatif entraîné par un couple de forces, on appelle *stator* la partie fixe qui exerce le couple et *rotor* la partie mobile qui est mise en rotation.



2.4 Théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe

TMC pour les solides en rotation

On adapte l'expression du théorème du moment cinétique scalaire vue au chapitre 18 pour les systèmes ponctuels. On s'appuie sur l'expression du moment cinétique ($L_\Delta = J_\Delta \omega$) et on ajoute à la somme des moments de forces d'éventuels couples. On rappelle que l'axe (Δ) doit être fixe et que le référentiel d'étude doit être galiléen.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left[\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_k) + \Gamma_k\right]}$$

3 Applications

En résumé

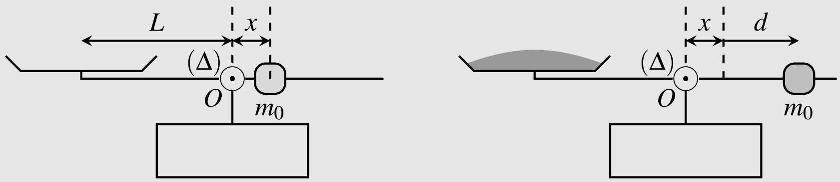
• Définir le système, le référentiel (éventuellement le repère) d'étude. Identifier l'axe de rotation.

• Effectuer le bilan des actions mécaniques (forces extérieures, couples) et situer le point d'application des forces.

• Mettre en œuvre le théorème du moment cinétique pour étudier une situation d'équilibre (cas statique) ou bien pour établir l'équation du mouvement (cas dynamique) vérifiée par la position angulaire $\theta(t)$ ou la vitesse angulaire de rotation $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$.

3.1 Cas statique

Exemple



Une balance à contrepoids est constituée d'un *fléau* (tige mobile pouvant pivoter autour de l'axe (Δ)) qui supporte un plateau dans lequel on place des objets dont on souhaite mesurer la masse. Le centre du plateau est situé à une distance L du pivot. De l'autre côté une masse calibrée m_0 (appelée *contrepoids*) peut coulisser le long du fléau de manière à maintenir l'équilibre de la balance.

Initialement le plateau est vide et le contrepoids est excentré d'une distance x qui équilibre la balance. On place une certaine quantité de sucre sur le plateau et la balance est de nouveau équilibrée quand le contrepoids est déplacé d'une distance d. Pour les applications numériques on prendra $L = 30\,\text{cm}$, $m_0 = 1{,}5\,\text{kg}$ et $d = 10\,\text{cm}$.

1. Exprimer le moment $\mathscr{M}_1$, par rapport à (Δ), du poids du système $\{$fléau + plateau vide$\}$ en fonction de m_0, x et le champ de pesanteur g.

2. Exprimer la masse m de sucre en fonction de m_0, d et L. Faire l'application numérique.

3. En pratique des graduations sont inscrites sur le fléau pour y lire directement les valeurs de masse lorsque la balance est en équilibre. Calculer la sensibilité de la balance en $\text{cm} \cdot \text{kg}^{-1}$. Comment faire pour augmenter la sensibilité d'une balance de taille fixée ? Quel inconvénient cela engendre-t-il ?

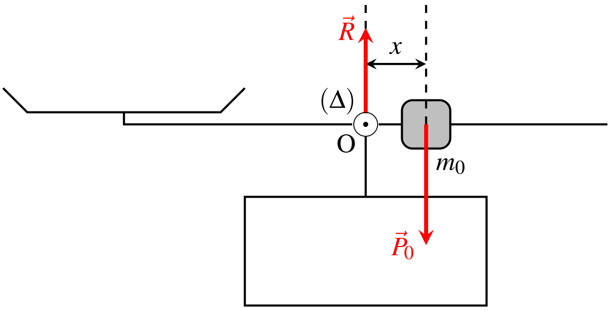
► Mettre en œuvre le théorème du moment cinétique

1. On étudie la situation d'équilibre initiale de la balance. On considère le système $S = \{$fléau + plateau vide + contrepoids$\}$. Il est soumis au poids $\vec{P}_0$ du contrepoids, au poids $\vec{P}_1$ du système $\{$fléau + plateau vide$\}$ et à la réaction $\vec{R}$ du pivot. On applique le théorème du moment cinétique à $\mathscr{S}$ en équilibre, par rapport à (Δ), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$0 = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{R})$$

► Calculer un moment de force scalaire avec le bras de levier

On représente $\vec{P}_0$ et $\vec{R}$ sur le schéma. Le poids $\vec{P}_0$ s'applique au centre du contrepoids tandis que la réaction du pivot s'applique en O.



Le bras de levier de $\vec{P}_0$ est égal à x et son moment par rapport à (Δ) est **négatif** (règle de la main droite), d'où : $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}_0) = -xm_0g$.

Le bras de levier de la réaction du pivot est **nul** car $\vec{R}$ s'applique en un point de (Δ). Par conséquent $\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$. D'après le théorème du moment cinétique on conclut que :

$$\boxed{\mathscr{M}_1 = xm_0g}$$

2. On étudie l'équilibre final de la balance. On inclut désormais le sucre dans le système d'étude : $S = \{$fléau + plateau vide + contrepoids + sucre$\}$. En plus des forces énoncées à la question précédente, le système est soumis au poids $\vec{P}$ du sucre qui s'applique au centre du plateau. On applique à nouveau le théorème du moment cinétique à S, par rapport à (Δ), dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$0 = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_\Delta(\vec{P}_0) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \underbrace{\mathscr{M}_\Delta(\vec{R})}_{=0}$$

Le moment $\mathscr{M}_1$ du poids du système $\{$fléau + plateau vide$\}$ est identique à celui de la question précédente. Le bras de levier de $\vec{P}_0$ vaut désormais $x+d$ donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}_0) = -(x+d)m_0g$. Le bras de levier de $\vec{P}$ vaut L et son moment par rapport à (Δ) est positif : $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = Lmg$.

$$0 = xm_0g - (x+d)m_0g + Lmg \iff \boxed{m = \frac{d}{L}m_0 = 0{,}50\,\mathrm{kg}}$$

► **Exprimer la sensibilité d'un instrument de mesure**

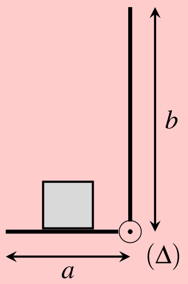
3. La balance permet de relier un déplacement d du contrepoids à une masse m ajoutée sur le plateau. La sensibilité de la balance est définie par :

$$\boxed{s = \frac{d}{m} = \frac{L}{m_0} = 20\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{kg}^{-1}}$$

La sensibilité de la balance dépend de deux paramètres : **sa taille** L et **la masse calibrée** m_0. Pour une balance de taille fixe le seul moyen d'augmenter la sensibilité consiste à **utiliser un contrepoids plus léger**. Il y a toutefois un inconvénient : en augmentant la sensibilité de la balance sans changer la taille du fléau **on réduit la masse maximale qui peut être mesurée**.

Application 1

Un diable est un instrument qui permet de transporter de lourdes charges avec un minimum d'efforts. On le modélise de la manière suivante : le plateau horizontal a une masse $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ et une longueur $a = 50\,\mathrm{cm}$, tandis que le levier a une masse $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$ et une hauteur $b = 1,0\,\mathrm{m}$. On pose une charge de masse $m = 15\,\mathrm{kg}$ au centre du plateau et on cherche à la soulever en tirant sur le levier pour faire basculer le diable autour de l'axe (Δ) fixe (les roues du diable sont bloquées). On prendra $g = 10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.



1. On cherche à réduire au maximum l'effort à fournir pour faire pivoter le diable. Où faut-il placer les poignées du levier ? Dans quelle direction faut-il tirer ? Justifier.

2. Une personne tire sur le levier avec une force en norme F. On suppose pour l'instant que le diable repose encore sur le sol. À l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer le moment $\mathscr{M}_{\Delta,\mathrm{sol}}$ lié à l'action du sol sur le diable.

3. Le diable pivote à partir du mouvement où $\mathscr{M}_{\Delta,\mathrm{sol}}$ s'annule. Calculer la force minimale $F_{\min}$ qu'il faut exercer sur le levier pour soulever la charge. Comparer au cas où l'on doit la soulever à mains nues. Par quel facteur le diable amplifie-t-il la force exercée par l'opérateur ?

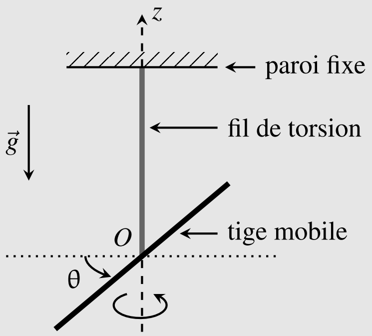
3.2 Solide en rotation

Exemple

Un pendule est constitué d'un fil de torsion vertical inextensible et sans masse, attaché d'un côté à une paroi fixe (dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen) et de l'autre côté à une tige mobile (voir schéma en page suivante). La tige, contenue à tout instant dans le plan horizontal (Oxy), peut pivoter sans frottement autour de l'axe (Oz) confondu avec le fil. On définit la position angulaire de référence $\theta = 0$ lorsque la tige est en équilibre et le fil dans son état naturel (sans torsion).

Lorsque le fil est torsadé, il cherche spontanément à pivoter pour revenir dans son état naturel. On admet que la résultante des actions mécaniques exercées par le fil sur la tige se compose :

- d'une force résultante de tension $\vec{T}$ colinéaire au fil ;
- d'un couple de rappel proportionnel à l'angle de torsion : $\Gamma = -C\theta$, avec C une constante de rappel positive.

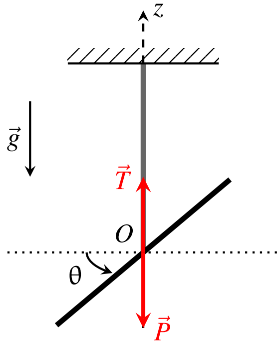


La tige a une masse m et un moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation J_z. Elle est homogène et son centre O est situé au niveau de la liaison avec le fil

Montrer que la tige effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre et exprimer la période des oscillations.

► **Mettre en œuvre le théorème du moment cinétique**

On choisit comme système la tige mobile. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$ (qui s'applique en son centre O), à la tension $\vec{T}$ du fil (qui s'applique également en O) et au couple de torsion Γ. On applique le théorème du moment cinétique à la tige par rapport à l'axe (Oz) fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :



$$J_z\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{T}) + \Gamma$$

Le poids et la tension du fil s'appliquent tous deux en un point de l'axe (Oz) donc leur bras de levier est nul : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0$. On obtient l'équation du mouvement en remplaçant le couple Γ par son expression :

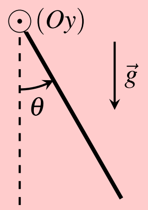
$$J_z\ddot{\theta} = -C\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_z}\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. La tige tourne autour de l'axe (Oz) en effectuant des oscillations harmoniques centrées sur la position d'équilibre $\theta = 0$. On détermine la période propre de ces oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_z}} \iff \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{C}}}$$

Application 2

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de longueur L et de masse M qui peut pivoter autour de l'axe (Oy) passant par l'une de ses extrémités. On néglige tout frottement. Le moment d'inertie de la tige par rapport à (Oy) est $J_y = \frac{1}{3}ML^2$.



1. Déterminer la période des petites oscillations du pendule.

2. On accroche sur la tige une masse ponctuelle m à la distance d du pivot. Le pendule oscille-t-il plus vite ou plus lentement ? Montrer que la réponse varie suivant la valeur de d, que l'on supposera comprise entre 0 et L.

4 Énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

4.1 Énergie cinétique et potentielle

Énergie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (Δ), de moment d'inertie J_Δ, vaut :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}$$

Énergie potentielle de pesanteur d'un solide

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide de masse m s'écrit (à une constante près) :

$$\boxed{E_p = \pm mgz_G}$$

avec z_G l'altitude du **centre d'inertie du solide**. Cette relation s'écrit avec un signe $+$ si l'axe (Oz) vertical est ascendant et $-$ s'il est descendant.

Énergie potentielle associée à un couple de torsion

Le couple $\Gamma = -C\theta$ exercé par un fil de torsion est conservatif et l'énergie potentielle associée vaut (à une constante près généralement choisie égale à zéro) :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}C\theta^2}$$

4.2 Théorèmes énergétiques pour un solide en rotation

Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un solide en rotation autour d'un axe (Δ) s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{\mathscr{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_P = \mathscr{M}_\Delta(\vec{F})\,\omega}$$

avec P le point d'application de $\vec{F}$, $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F})$ le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de rotation du solide. La puissance associée à un couple de forces s'écrit :

$$\boxed{\mathscr{P} = \Gamma\omega}$$

> La résultante des actions de contact au niveau d'une liaison pivot idéale est une force de réaction $\vec{R}$ qui s'applique en un point de l'axe (on néglige le moment résistant). Le bras de levier de la réaction est nul donc cette force ne travaille pas ($\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \implies \mathscr{P}(\vec{R}) = 0$). On conclut que pour une liaison pivot idéale **la puissance des actions de contact est nulle** (autrement dit les actions de contact ne travaillent pas).

La formulation mathématique des théorèmes énergétiques pour les solides est semblable à celles pour les points matériels. Il faudra toutefois prendre en compte toutes les actions mécaniques extérieures (forces et couples). On rappelle que ces théorèmes s'appliquent uniquement dans un référentiel galiléen.

Théorème de la puissance cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances de **toutes** les actions mécaniques extérieures (forces et couples) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_k \mathscr{P}_k}$$

Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique du solide, entre deux états, est égale à la somme des travaux de **toutes** les actions mécaniques extérieures (forces et couples) entre ces deux états :

$$\boxed{\Delta E_c = \sum_k W_k}$$

Pour le calcul d'un travail on retiendra ces deux cas de figure :

- comme on l'a vu précédemment le travail des actions de contact au niveau d'une liaison pivot idéale est nul ;
- le travail du poids s'écrit $W(\vec{P}) = \pm mgh$ avec h le dénivelé **du centre d'inertie G du solide**. Le travail est positif si G "tombe" d'une hauteur h et négatif si G "monte" d'une hauteur h.

Théorème de la puissance mécanique

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est égale à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures **non conservatives** (forces et couples) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_{k,\text{non cons}} \mathscr{P}_k}$$

Théorème de l'énergie méanique

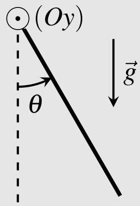
La variation de l'énergie mécanique du solide, entre deux états, est égale à la somme des travaux des actions mécaniques extérieures **non conservatives** (forces et couples) entre ces deux états :

$$\boxed{\Delta E = \sum_{k,\text{non cons}} W_k}$$

Remarque : Pour un système conservatif on pourra exploiter la **conservation de l'énergie mécanique** pour obtenir une intégrale première du mouvement (théorème de l'énergie mécanique) ou bien l'équation du mouvement (théorème de la puissance mécanique).

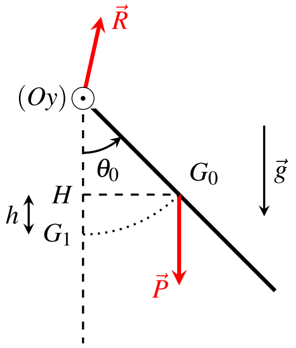
Exemple

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de longueur L et de masse M qui peut pivoter autour de l'axe (Oy) passant par l'une de ses extrémités. On néglige tout frottement. Le moment d'inertie de la tige par rapport à (Oy) est $J_y = \frac{1}{3}ML^2$. Initialement on lâche le pendule sans vitesse initiale depuis la position θ_0.



1. Déterminer la vitesse angulaire de rotation maximale du pendule.
2. Établir l'équation du mouvement du pendule à l'aide d'un raisonnement énergétique.

► **Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique**



1. On étudie la tige en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$ (s'applique en son centre) et à la réaction $\vec{R}$ de l'axe de rotation (s'applique en O). On applique le théorème de l'énergie cinétique à la tige, entre la position angulaire initiale θ_0 et la position angulaire pour laquelle sa vitesse de rotation est maximale, c'est-à-dire $\theta = 0$:

$$\Delta E_c = W(\vec{R}) + W(\vec{P})$$

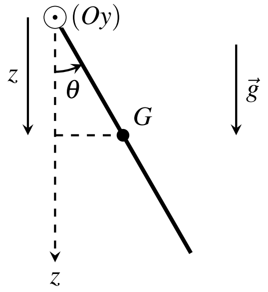
L'énergie cinétique est nulle à l'état initial. En notant $\omega_{\max}$ la vitesse angulaire de rotation maximale, on écrit donc : $\Delta E_c = \frac{1}{2} J_y \omega_{\max}^2 - 0 = \frac{1}{6} ML^2 \omega_{\max}^2$.

La réaction de l'axe ne travaille pas (son bras de levier est nul) et le travail du poids vaut $W(\vec{P}) = Mgh$ avec h le dénivelé du centre de la tige dont on détermine l'expression en s'appuyant sur la figure : $h = OG_1 - OH = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta_0)$. On conclut quant à la vitesse angulaire de rotation maximale :

$$\frac{1}{6} ML^2 \omega_{\max}^2 = Mg\frac{L}{2}(1 - \cos\theta_0) \iff \boxed{\omega_{\max} = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta_0)}}$$

► **Mettre en œuvre le théorème de la puissance mécanique**

La réaction de l'axe ne travaille pas et le poids est une force conservative. D'après le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$. L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.



On mesure l'énergie potentielle de pesanteur avec un axe (Oz) vertical descendant : $E_p = -mgz_G = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta$. On exprime l'énergie mécanique de la tige (on note qu'ici $\omega = \dot{\theta}$) :

$$E = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

On dérive par rapport au temps :

$$0 = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta = \dot{\theta}\left(\frac{1}{3} ML^2 \ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta\right)$$

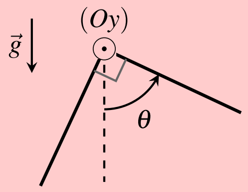
On conclut que la si la tige est en mouvement ($\dot{\theta} \neq 0 \forall t$), elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{3} ML^2 \ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0}$$

On retrouve l'expression classique d'une équation pendulaire, que l'on peut simplifier si le pendule effectue des oscillations de petite amplitude : $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$. Les petites oscillations sont harmoniques de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$.

Application 3

Un pendule pesant est constitué de deux tiges homogènes orthogonales identiques (masse m, longueur L) formant un ensemble rigide pouvant pivoter sans frottement autour de l'axe (Oy). Le moment d'inertie d'une tige par rapport à (Oy) vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$.



1. À l'aide d'un raisonnement énergétique, établir l'équation du mouvement du pendule. Déterminer la position d'équilibre θ_e.
2. On étudie les petits mouvements autour de la position d'équilibre. On définit une nouvelle variable $\varepsilon = \theta - \theta_e$, avec $\left|\varepsilon\right| \ll \theta_e$. Établir l'équation vérifiée par $\varepsilon(t)$ puis exprimer la période des petites oscillations du pendule.