TD complexes

Exercice 1
(1202)
Soit $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2
(1203)
Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

1. Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.
2. Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 3
(1204)
Calculer pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \ \ et \ S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 4
(1212)
Résoudre l'équation $|z+1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 5
(1213)
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 6
(1220)
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 7
(1225)
Simplifier :

1. $j(j+1)$
2. $\dfrac{j}{j^2+1}$
3. $\dfrac{j+1}{j-1}$

Exercice 8
(1233)
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?
Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 9
(1234)
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
2. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0.$

Exercice 10
(1235)

1. Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12\mathrm{i}$.
2. Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2\mathrm{i})z^2 + 3(1 + \mathrm{i})z - 10(1 + \mathrm{i}) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.
3. Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 11
(1238)
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 12
(1239)
Simplifier $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 13
(1240)
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 14
(1241)
Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 0$$

montrer

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 0$$