Corrigé
TD calcul de primitives

Exercice 1
(218)
Dans chaque cas la détermination d'une primitive est (assez) immédiate a)

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = [-\frac{1}{t}]_1^2 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{arctan}t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

c)

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{arcsin}t]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 2
(219)
a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = [\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}]_0^{2\pi} = \pi$$

b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t\, dt = [t\ln t - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = [\sqrt{1+t^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 3
(221)
a) On reconnaît une forme $u'e^u$

$$\int \text{t}e^{t^2}\, dt = \frac{1}{2}\text{e}^{t^2} + C^{te}$$

b) On reconnaît une forme $u'u$

$$\int \frac{\ln t}{t}\, dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}$$

c) On reconnaît une forme u'/u

$$\int \frac{dt}{\text{t}\ln t} = \ln|\ln t| + C^{te}$$

Exercice 4

(222)
Dans chaque cas on reconnaît une forme $u^{'}f(u)$ a)

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C^{te}$$

sur

$$]-\infty,-1[$$

ou

$$]-1,+\infty[.$$

b)

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. c)

$$\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}t^2 + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

(223)
a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1} = \frac{1}{i}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-i} = -i\int \frac{t+i}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

puis

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1} = \mathrm{arctan}t - \frac{i}{2}\ln(t^2+1) + C^{te}$$

b) On observe

$$\int \mathrm{e}^t\mathrm{cos}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et

$$\int \mathrm{e}^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+i}\mathrm{e}^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int \mathrm{e}^t\mathrm{cos}t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\mathrm{cos}t + \mathrm{sin}t) + C^{te}$$

c) On observe

$$\int t\mathrm{sin}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int t\mathrm{e}^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right)$$

et par intégration par parties

$$\int t\mathrm{e}^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{t+i(1-t)}{2}\mathrm{e}^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int t\mathrm{sin}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(t\mathrm{sin}t + (1-t)\mathrm{cos}t) + C^{te}$$

Exercice 6

(225)
a) C'est une forme $u^{'}u$ donc

$$\int \cos t \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 t + C^{te}$$

b) C'est une forme $u^{'}/u$ donc

$$\int \tan t \, \mathrm{d}t = -\ln|\cos t| + C^{te}$$

c) On se ramène à une forme $u^{'}u^2$ via $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$\int \cos^3 t \, \mathrm{d}t = \int \cos t - \int \cos t \sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 7

(226)
a) Par intégration par parties

$$\int t \ln t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \int \frac{1}{2} t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + C^{te}$$

b)Par intégration par parties

$$\int t \arctan t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2 \, \mathrm{d}t}{1+t^2}$$

puis en écrivant $\dfrac{t^2}{t^2+1} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ on obtient

$$\int t \arctan t \, dt = \frac{1}{2}\left((t^2+1)\arctan t - t\right) + C^{te}$$

c) En écrivant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\int t \sin^3 t \, \mathrm{d}t = \int t \sin t \, \mathrm{d}t - \int t \sin t \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$

D'une part

$$\int t \sin t \, \mathrm{d}t = \sin t - t \cos t + C^{te}$$

D'autre part, par intégration par parties

$$\int t \sin t \cos^2 t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{3} t \cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos^3 t \, \mathrm{d}t$$

avec

$$\int \cos^3 \mathrm{d}t = \int \cos t \, \mathrm{d}t - \int \cos t \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$$

Finalement

$$\int t \sin^3 t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sin t - t \cos t + \frac{1}{3} t \cos^3 t + \frac{1}{9}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 8

(227)
Par intégration par parties a)

$$\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -(t^2+t+2)\mathrm{e}^{-t}+C^{te}.$$

b)

$$\int (t-1)\mathrm{sin}t\mathrm{d}t = \mathrm{sin}t+(1-t)\mathrm{cos}t+C^{te}.$$

c)

$$\int (t+1)\mathrm{ch}t\mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{sh}t-\mathrm{ch}t+C^{te}.$$

Exercice 9

(230)
Par intégration par parties a)

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = [t\ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

En écrivant $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2-\dfrac{2}{1+t^2}$ on obtient

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2[t-\mathrm{arctan}t]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

b) Par intégration par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,dt = [\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\,dt = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

c) Par deux intégrations par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,dt = [t\sin(\ln t)]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi}\cos(\ln t)\,dt = -[t\cos(\ln t)]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,dt$$

donc

$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,dt = -\frac{1}{2}[t\cos(\ln t)]_1^{\mathrm{e}^\pi} = \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}$$

Exercice 10

(235)
a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \underset{t=\mathrm{sin}u}{=} \int_0^{\pi/2}\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \underset{t=\mathrm{sin}u}{=} \int_0^{\pi/2}\sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2u\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}$$

c)

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln u^2\mathrm{d}u = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2}+4$$

Exercice 11
(243)
a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t + 1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \mathrm{d}u = [\ln u - \ln(u+1)]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1) + 1$$

Exercice 12
(322)
a)

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}} \mathrm{d}x \underset{u=x^6}{=} \frac{1}{6} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{6} \arctan x^6 + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. b)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)} = \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C^{te}$$

sur

$$]-\infty, -1[,]-1, 0[,]0, 1[$$

ou

$$]1, +\infty[.$$

c)

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1} \mathrm{d}x = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. d)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1) + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. e)

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)-2}{(x+1)^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. f)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C^{te}$$

sur

$$]-\infty, 0[$$

ou

$$]0, +\infty[.$$

g)

$$\int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$$

sur

$$]-\infty,-1[$$

ou

$$]-1,+\infty[.$$

h)

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$$

sur

$$]-\infty,1[$$

ou

$$]1,+\infty[.$$

i)

$$\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \arctan x + C^{te}$$

sur

$$]-\infty,-1[,$$

$$]-1,1[$$

ou

$$]1,+\infty[.$$

j)

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

puis

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. k)

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-1/3}{(x-j)^2} + \frac{-1/3}{(x-j^2)^2} + \frac{2/3}{x^2+x+1}$$

donc

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$. l)

$$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2x}+1}\mathrm{d}x$$

donc

$$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13
(323)
a)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = [\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = [\frac{1}{6}\mathrm{ln}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}]_0^1 = -\frac{1}{3}\mathrm{ln}2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctan}x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = [-\frac{\mathrm{arctan}x}{x+1}]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1}$$

donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\mathrm{ln}\,|x+1| - \frac{1}{4}\mathrm{ln}(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{arctan}x + C^{te}$$

puis

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctan}x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\mathrm{ln}2 - \frac{1}{4}\mathrm{ln}2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{ln}2}{4}.$$

Exercice 14
(328)
a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{u+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-\sqrt{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{ln}\left|\frac{\sin x+\sqrt{2}}{\sin x-\sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{ln}\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

c) Sur

$$I_k =]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \underset{u=\tan x}{=} \int 1+u^2\mathrm{d}u = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C^{te}$$

d) Sur

$$I_k =]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))^2} \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}dt$$

donc

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{4}\mathrm{ln}\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + C^{te}$$

Exercice 15

(329)
Sur
$$I_k =]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$$
avec $k \in \mathbb{Z}$,
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + \cos x} \underset{t=\tan x/2}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C^{te}$$
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3 + \cos x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cherchons F primitive de celle-ci sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

F est primitive sur I_k, donc il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tel que sur I_k,
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C_k$$
Par limite à droite et à gauche en $\pi + 2k\pi$,
$$F(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1}$$
Par suite $\forall k \in \mathbb{Z}, C_k = \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0$ On peut résumer : $\exists C_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan \dfrac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0 & \text{si } x \in I_k \\ \dfrac{2k+1}{2\sqrt{2}}\pi + C_0 & \text{si } x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$
Ceci détermine la fonction F à une constante près. Inversement, étant assuré de l'existence de F, on peut affirmer que de telles fonctions sont bien primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{3 + \cos x}$.

Exercice 16

(334)
a) Sur $[-1, +\infty[$,
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x+1}} \underset{u=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2u(u^2-1)}{1+u} \mathrm{d}u = \int 2u(u-1)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - x + C^{te}.$$
b) Sur $[0, +\infty[$,
$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \int 2u \frac{1-u}{1+u} \mathrm{d}u = 2\int -u + 2 - \frac{2}{1+u} \mathrm{d}u = -x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1 + \sqrt{x}) + C^{te}.$$
c) Sur
$$]-\infty, 1]$$
ou
$$]2, +\infty[,$$
$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \mathrm{d}x = \int \frac{-2y^2 \mathrm{d}y}{(y-1)^2 (y+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + C^{te}$$
donc
$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \mathrm{d}x = \sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{|x-1|} - \sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-2|}} + C^{te}.$$