DM4, corrigé

Exercice 1

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x, y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Mais alors,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

et donc on a bien $(x, y) \in A$.
 Réciproquement, prenons $(x, y) \in A$ et prouvons que $(x, y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t. On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ et $(x, y) \in C$.

Exercice 2

Par symétrie du problème en A et B, il suffit de démontrer que $A \subset B$. Prenons $x \in A$ et supposons que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$ et donc les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ sont différents, une contradiction. C'est donc que $x \in B$.

Par symétrie du problème en B et C, il suffit de démontrer l'inclusion $B \subset C$. Soit donc $x \in B$. On distingue deux cas : <ul class="rien">

ou bien $x \in A$. Dans ce cas, $x \in A \cap B = A \cap C$, et donc $x \in C$.

ou bien $x \notin A$. Dans ce cas, $x \in A \cup B = A \cup C$ et donc $x \in A$ ou $x \in C$. Puisqu'on est dans le cas $x \notin A$, on en déduit que $x \in C$. Dans tous les cas, on a démontré $x \in C$, et donc $B \subset C$. Une seule des deux conditions n'est pas suffisante : <ul class="rien">

Si on suppose seulement que $A \cup B \subset A \cup C$, il suffit de prendre $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. On a bien $A \cup B \subset A \cup C$, mais on n'a pas $B \subset C$.

Si on suppose seulement que $A \cap B \subset A \cap C$, il suffit de prendre $A = C = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$.

Exercice 3

Remarquons d'abord que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Prouvons ensuite que f est injective. Soient (n, p) et (m, q) deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f(n, p) = f(m, q)$. Alors on a $2^n(2p + 1) = 2^m(2q + 1)$. Supposons par exemple $n \geq m$. Alors on obtient

$$2^{n-m}(2p + 1) = 2q + 1.$$

Si $n \neq m$, le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, une contradiction. Donc $n = m$. On obtient alors $2p+1 = 2q+1$, soit aussi $p = q$. Finalement, on a bien $(n, p) = (m, q)$ et donc f est injective. Prouvons ensuite que f est surjective. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Alors l se décompose en produit de facteurs premiers

$$l = 2^n p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

avec p_i, $i \geq 2$, des nombres premiers impairs. Le produit de nombres impairs étant impair, on sait que $p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ est impair et s'écrit donc $2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$. On a donc $l = 2^n(2p + 1) = f(n, p)$ et f est surjective. Pour trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, il suffit de composer avec une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, par exemple l'application $n \mapsto n - 1$. Ainsi, l'application $g : (n, p) \mapsto 2^n(2p + 1) - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 4
(i) f(-1) = f(1) donc non injective, -1 n'a pas d'antécédent, donc non surjective
(ii) non injective mais surjective.
(iii) injective, mais pas surjective
(iv) injective et surjective
(v) f(-1) = f(1) donc non injective, $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ donc i n'a pas d'antécédent, donc non sujective.
(vi) injective et surjective: pour Z un complexe donné, résolvons (*) Z = |z|.z: alors $|z| = \sqrt{|Z|}$. Si Z=0, alors z=0. Sinon $\bar{Z} = |z|\bar{z}$, donc $Z + \bar{Z} = |z|(z + \bar{z})$, donc $Re(Z) = |z|Re(z)$, donc $Re(z) = \dfrac{Re(Z)}{\sqrt{|Z|}}$. De même on obtient $Im(z) = \dfrac{Im(Z)}{\sqrt{|Z|}}$. Ainsi on a une unique solution z pour (*). f est donc bijective.
(vii) injective, mais 2 n'a pas d'antécédent, donc non surjective
(viii) voir (i)
(ix) injective mais pas surjective (résoudre y = n+1 avec y dans $\mathbb{N}$)
(x) bijective (résoudre y = n+1)

Exercice 5

1. $x \mapsto \{x\}$ est clairement injective.
2. supposons A = f(a): a-t-on $a \in A$?
   si $a \in A$ alors, par défintion de A, on a $a \notin A$: contradiction.
   si $a \notin A$, alors, par défintion de A, on a $a \in A$: contradiction.
   Dans tous les cas on a une contradiction, donc il n'existe pas de a dans E tel que A = f(a).
   f n'est donc pas surjective. Il n'y a donc pas d'application surjective d'un ensemble vers celui de ses parties $\square$