



DS 3 - SI

Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.
- Les exercices sont indépendants.

Table des matières

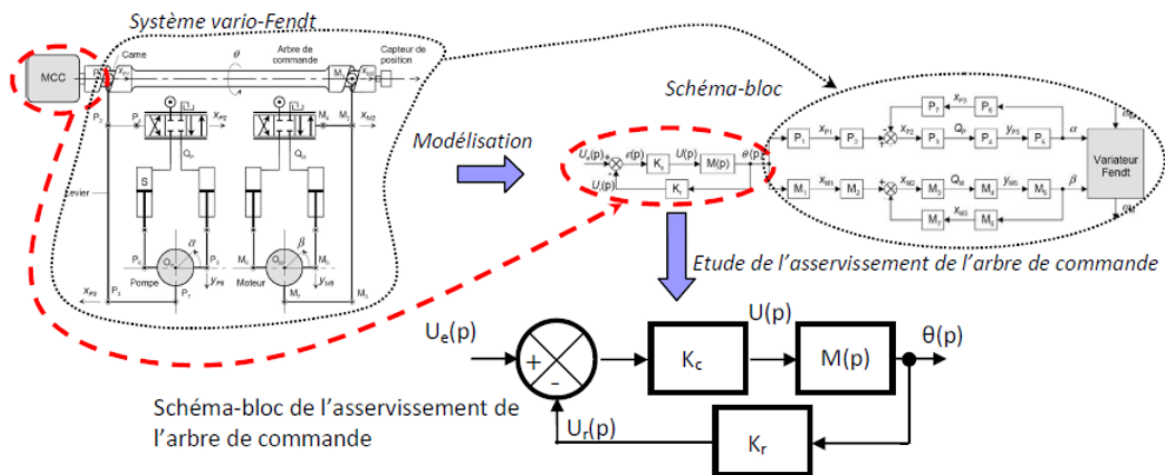
1	Etude de l'asservissement de l'arbre de commande de transmission	2
1.1	Introduction	2
1.2	Première approche	3
1.3	Amélioration de l'asservissement	4
2	Identification de liaison à partir de torseur	6
2.1	Torseur cinématique	6
2.2	Torseur statique	6
3	Antenne parabolique	7

1. Etude de l'asservissement de l'arbre de commande de transmission

Inspiré de CCP MP 2008

1.1 Introduction

Le thème proposé concerne la transmission à variation continue développée par la société Fendt qui équipe les gammes de tracteurs "Fendt 300 Vario" à "Fendt 900 Vario". On s'intéresse ici plus particulièrement à l'asservissement de position de l'arbre de commande de cette transmission modélisé sur le schéma.



Sur un engin agricole, la transmission à variation continue remplace les fonctions de l'ensemble boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage que l'on retrouve classiquement sur la plupart des voitures. On ne peut pas utiliser la solution boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage car l'énergie cinétique d'un engin agricole n'est pas suffisante pour permettre le passage d'une vitesse (fonction de la boîte de vitesse) par désaccouplement de l'arbre moteur (fonction de l'embrayage) sans caler. La transmission à variation continue permet donc d'adapter de façon optimale la vitesse d'avancement du tracteur en fonction de ses conditions d'utilisation sans avoir à désaccoupler le moteur du reste de la chaîne de transmission de puissance. Pour commander le variateur, le conducteur dispose au sein de la cabine d'un joystick. Celui-ci permet d'agir sur l'inclinaison d'éléments hydrostatiques par l'intermédiaire d'un moteur à courant continu asservi en position entraînant un arbre de commande à came. On donne le modèle de connaissance de l'asservissement de l'arbre moteur du système

vario-Fendt :

$$u(t) = Ri(t) + K_e \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$J_e \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = K_a i(t)$$

Avec :

- $u(t)$ la tension appliquée aux bornes du moteur ;
- $i(t)$ le courant induit ;
- R la résistance de l'induit avec $R = 2\Omega$;
- J_e l'inertie de l'arbre de commande avec $J_e = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{kg.m}^2$;
- K_e la constante de force contre électromotrice avec $K_e = 0,05 \text{V.s/rad}$;
- K_a la constante de couple avec $K_a = 0,05 \text{Nm/A}$.

On utilisera les notations et les données suivantes :

- K_c le gain du correcteur à action proportionnelle ;
- $K_r = 2 \text{V/rad}$ le gain du capteur de position monté sur l'arbre de commande ;
- $M(p)$ fonction de transfert du moteur.

On donne un extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit permettre l'asservissement en position de l'arbre de commande du système Vario-Fendt	Temps de réponse pour une entrée en échelon	<1 s

1.2 Première approche

Question 1: Déterminer la fonction de transfert du moteur électrique $M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous forme canonique $M(p) = \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}$. Donner ainsi les expressions de K_m et τ_m . Faire les applications numériques.

Question 2: Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ du système et en déduire l'expression du gain en boucle ouvert K_{BO} .

Question 3: Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$F(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Donner les expressions de K_{BF} , ξ et ω_0 en fonction de K_{BO} et τ_m .

Question 4: Déterminer la valeur du gain de boucle ouverte K_{BO} de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans produire de dépassement. En déduire la valeur du gain K_c de l'action proportionnelle du correcteur.

Question 5: Montrer qu'avec la valeur de K_c choisie précédemment, la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme $F(p) = \frac{K_{BF}}{(1 + pT)^2}$. Calculer K_{BF} et T .

Question 6: La figure 1 montre la réponse temporelle du moteur à un échelon d'amplitude 2V. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% du système.

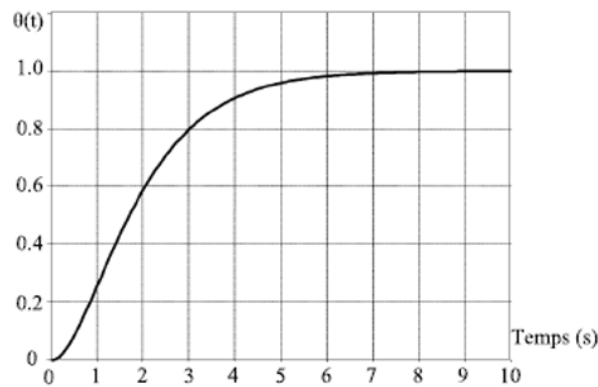


FIGURE 1 – Réponse temporelle du moteur à un échelon d'amplitude 2V.

Question 7: Conclure quant à l'exigence de rapidité du cahier des charges.

1.3 Amélioration de l'asservissement

Afin d'améliorer les performances, des modifications ont été apportées à l'asservissement. La figure 2 montre la réponse temporelle (en seconde) du moteur à un échelon d'amplitude 2V après modification.

Question 8: Préciser l'ordre de la fonction de transfert du système, en justifiant.

Question 9: Déterminer graphiquement, en utilisant l'abaque fournit la valeur du coefficient d'amortissement ξ .

Question 10: Déterminer mathématiquement la valeur du coefficient d'amortissement

en utilisant la formule $D_n = e^{-\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, où D_n correspond à la valeur du n -ième dépassement. Faites le calcul pour deux dépassements différents.

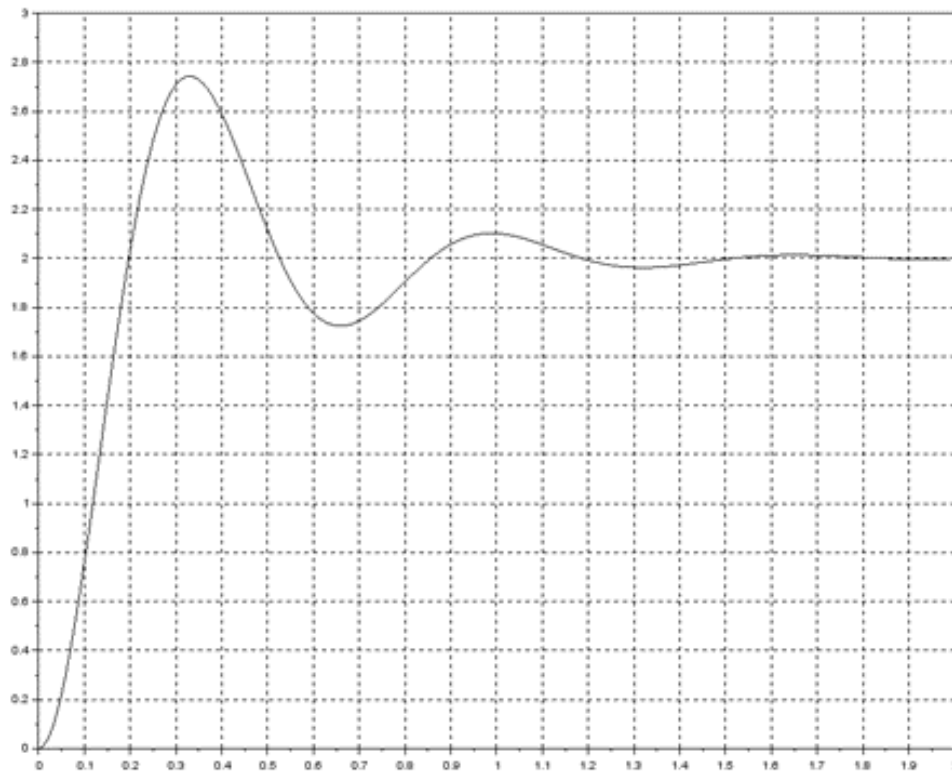
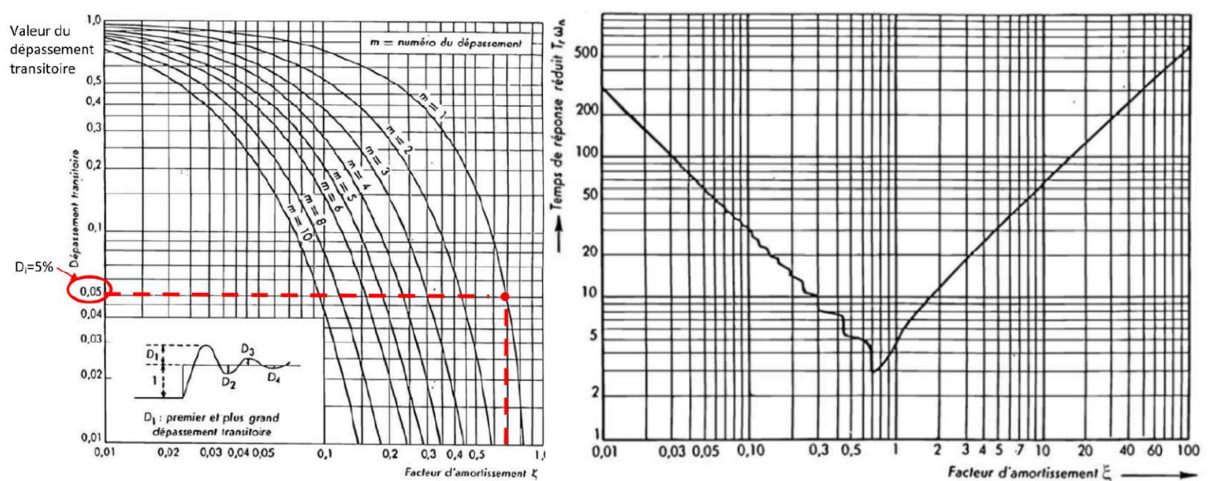


FIGURE 2 – Réponse temporelle du moteur (en seconde) à un échelon d'amplitude 2V avec correction.

Question 11: A partir de la formule $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$, où T_p est la pseudo période, déterminer la pulsation propre non amortie ω_0 .

Question 12: Déterminer en utilisant l'abaque fournit la valeur du temps de réponse à 5%.



2. Identification de liaison à partir de torseur

2.1 Torseur cinématique

Question 13: Identifier les liaisons correspondantes et représenter leur symbolisations normalisées planes et spatiales.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \{\mathcal{V}_{2/1}\} &= \begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\
 \text{(b)} \quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} &= \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\
 \text{(c)} \quad \{\mathcal{V}_{4/3}\} &= \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}
 \end{aligned}$$

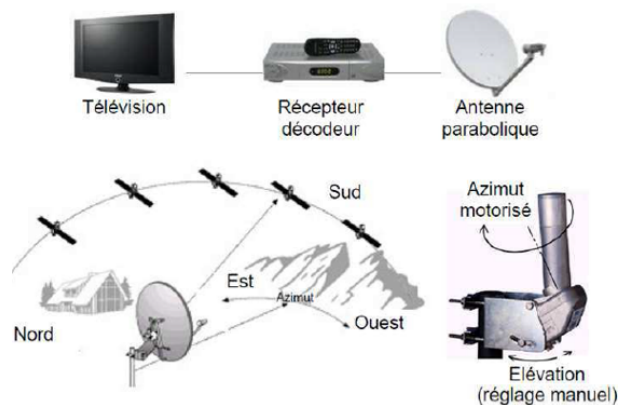
2.2 Torseur statique

Question 14: Identifier les liaisons correspondantes et représenter leur symbolisations normalisées planes et spatiales.

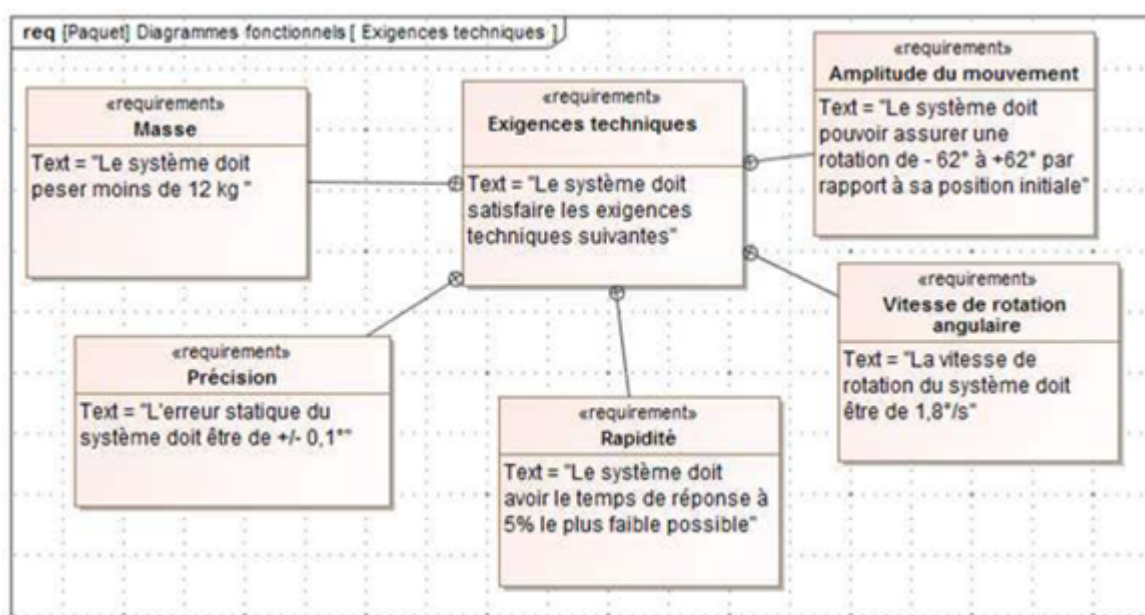
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 4}\} &= \begin{pmatrix} F_x & M_x \\ F_y & 0 \\ F_z & M_z \end{pmatrix}_{(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\
 \text{(b)} \quad \{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 5}\} &= \begin{pmatrix} F_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{pmatrix}_{(E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\
 \text{(c)} \quad \{\mathcal{T}_{7 \rightarrow 6}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_z & 0 \end{pmatrix}_{(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}
 \end{aligned}$$

3. Antenne parabolique

La réception de chaînes de télévision par satellite nécessite un récepteur/décodeur et une antenne parabolique. Pour augmenter le nombre de chaînes reçues, l'antenne doit pouvoir s'orienter vers un ou plusieurs satellites différents. Le satellite choisi dépend de la chaîne demandée. Tous les satellites de radiodiffusion sont situés sur l'orbite géostationnaire à 36 000 km au dessus de l'équateur. Le réglage de l'orientation de l'antenne ne nécessite donc qu'une seule rotation autour d'un axe appelé axe d'azimut.



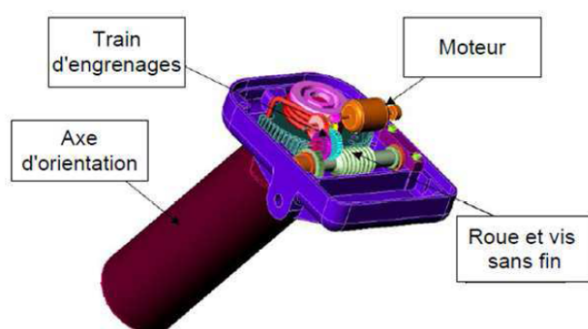
On donne une description structurée du système ainsi qu'un extrait partiel de cahier des charges fonctionnel.



L'axe d'orientation d'azimut utilise un dispositif de réduction de vitesse (engrenages et roue-et-vis-sans-fin). Si on note $\omega_a(t)$ la vitesse de rotation de l'axe de l'orientation et $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation du moteur, on a la relation suivante :

$$\frac{\omega_a(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{N} = \frac{1}{23328}$$

On donne le modèle de connaissance du moteur à courant continu suivant :



$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= e_m(t) + Ri_m(t) + L \frac{di_m(t)}{dt} & e_m(t) &= k_e \omega_m(t) \\
 J \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= c_m(t) & c_m(t) &= k_c i_m(t)
 \end{aligned}$$

Avec :

$u_m(t)$: tension aux bornes du moteur (en V)	J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m^2)
$e_m(t)$: force contre-électromotrice (en V)	R : résistance électrique du moteur ($9,1 \, \Omega$)
$i_m(t)$: intensité (en A)	L : inductance du moteur (en H)
$\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s)	K_e : constante de force contre-électromotrice (0.022Vs/rad)
$c_m(t)$: couple moteur (en Nm)	K_c : constante de couple (0.022Nm/A)

Question 15: Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace, en considérant que les conditions de Heaviside sont respectées.

Question 16: Réaliser le schéma-bloc du moteur, l'entrée est $U_m(p)$ et la sortie est $\Omega_m(p)$.

Question 17: Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$. Mettre cette fonction sous forme canonique et donner son ordre et sa classe.

On note $\tau_e = \frac{L}{R}$ la constante de temps électrique du moteur et $\tau_m = \frac{RJ}{K_e K_c}$. On suppose que le temps d'établissement du courant est bien inférieur au temps de mise en mouvement des parties mécaniques, ce qui se traduit par $\tau_e \ll \tau_m$.

Question 18: Montrer que la fonction de transfert du moteur peut s'écrire

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}. \text{ Donner l'expression de } K.$$

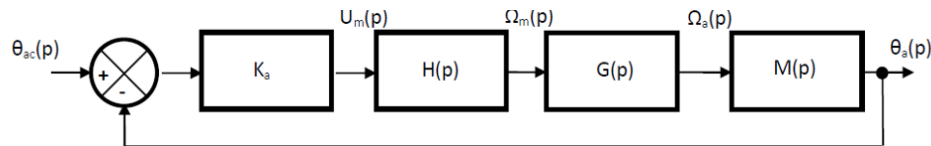
Grâce à la propriété $\tau_e \ll \tau_m$, on admet la simplification $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_m p)}$.

Question 19: En sollicitant le système par une entrée en échelon de valeur U_0 , déterminer l'expression analytique de $\omega(t)$ en fonction de K , τ_m et U_0 .

Indépendamment des résultats précédents, on considère pour la suite $\tau_m = 0.012 \text{s}$ et $K = 45 \text{rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$. La tension nominale d'utilisation est $U_0 = 18 \text{V}$.

Question 20: Montrer que le moteur n'excède pas sa valeur limite de rotation de 8000tr/min .

La chaîne d'asservissement complète est donnée sur le schéma-bloc suivant, où θ_{ac} est l'angle consigne, θ_a l'angle réel de l'antenne défini par $\frac{d\theta_a(t)}{dt} = \omega_a(t)$ et K_a un gain pur constant.



Question 21: Déterminer l'expression de $G(p)$ et $M(p)$.

Question 22: Déterminer la fonction de transfert $F(p) = \frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)}$. L'écrire sous forme canonique, déterminer son ordre et son gain. Exprimer les expression du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation propre amortie ω_0 .

Question 23: Montrer que le système vérifie le critère d'écart de positionnement du cahier des charges.

Question 24: Déterminer K_a pour que le système puisse satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.