



Correction DM 2 - SI

Consignes

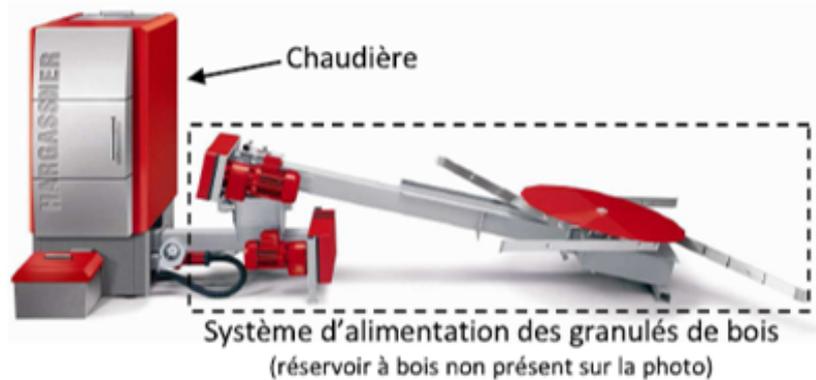
- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- **Aucun retard ne sera accepté.**

Table des matières

1	Chaudière à granulés	2
1.1	Modélisation en SLCI du corps de chauffe de la chaudière	2
1.2	Étude des performances du corps de chauffe de la chaudière	7

1. Chaudière à granulés

On s'intéresse au corps de chauffe situé dans une chaudière à granulés de bois dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait partiel de cahier des charges.

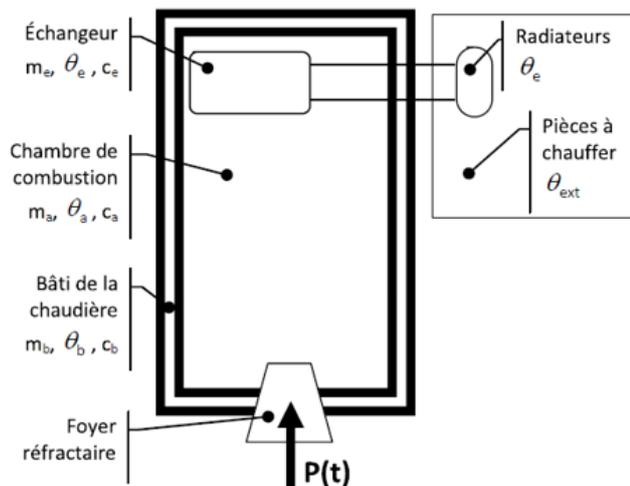


Exigences	Critères	Niveaux
1.1 Le système doit permettre le chauffage de bâtiments à partir de la combustion de granulés de bois	Température à atteindre dans la pièce à puissance nominale.	$25^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$ pour une puissance calorifique de $P_0 = 10\text{kW}$.

1.1 Modélisation en SLCI du corps de chauffe de la chaudière

Pour ce modèle on considère que :

- $P(t)$ est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière.
- L'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur.
- L'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.
- Le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.



On note :

Notation	Grandeur	Valeur
$\theta_b(t)$	la température du bâti de la chaudière	
m_b	la masse du bâti à monter en température	$m_b = 200kg$
c_b	la capacité calorifique massique du bâti	$c_b = 500J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_a(t)$	la température de l'air dans la chambre de combustion	
m_a	la masse de l'air à monter en température	$m_a = 2kg$
c_a	la capacité calorifique massique de l'air	$c_a = 700J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_e(t)$	la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs	
m_e	la masse de l'eau à monter en température dans l'échangeur	$m_e = 50kg$
$\theta_a(t)$	la température de l'air dans la chambre de combustion	
c_e	la capacité calorifique massique de l'eau	$c_e = 4000J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_{ext}(t)$	la température ambiante des pièces à chauffer	

On donne ci-dessous les équations issues du modèle de connaissance de la chaudière :

$$m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab}[\theta_b(t) - \theta_a(t)] = P(t) \quad (1)$$

$$m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae}[\theta_a(t) - \theta_e(t)] = K_{ab}[\theta_b(t) - \theta_a(t)] \quad (2)$$

$$m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae}[\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)] = K_{ae}[\theta_a(t) - \theta_e(t)] \quad (3)$$

Avec :

- K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion tel que $K_{ab} = 40J.s^{-1}.K^{-1}$;
- K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs tel que $K_{ae} = 400J.s^{-1}.K^{-1}$.

Question 1: En supposant des conditions initiales nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace la transformée des équations du modèle de connaissance présenté.

Réponse 1:

$$m_b c_b p \theta_b(p) + K_{ab}[\theta_b(p) - \theta_a(p)] = P(p) \quad (4)$$

$$m_a c_a p \theta_a(p) + K_{ae}[\theta_a(p) - \theta_e(p)] = K_{ab}[\theta_b(p) - \theta_a(p)] \quad (5)$$

$$m_e c_e p \theta_e(p) + K_{ae}[\theta_e(p) - \theta_{ext}(p)] = K_{ae}[\theta_a(p) - \theta_e(p)] \quad (6)$$

Question 2: Exprimer $\theta_b(p)$ en fonction de $\theta_a(p)$ et de $P(p)$ et des variables m_b , c_b et K_{ab} . Mettre sous la forme $\theta_b(p) = H_1(p)\theta_a(p) + H_2(p)P(p)$.

Réponse 2: $\theta_b(p)[m_b c_b p + K_{ab}] = K_{ab} \theta_a(p) + P(p)$

$$\Leftrightarrow \theta_b(p) = \frac{1}{m_b c_b p + K_{ab}} [K_{ab} \theta_a(p) + P(p)]$$

$$\Leftrightarrow \theta_b(p) = \frac{1}{\frac{m_b c_b}{K_{ab}} p + 1} \theta_a(p) + \frac{1}{K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_b c_b}{K_{ab}} p + 1} P(p)$$

soit $H_1(p) = \frac{1}{\frac{m_b c_b}{K_{ab}} p + 1}$ et $H_2(p) = \frac{1}{K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_b c_b}{K_{ab}} p + 1}$.

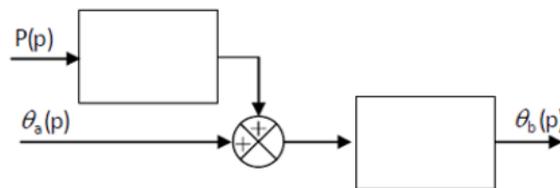
Question 3: Préciser l'ordre des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Définir les expressions littérales de la constante de temps de ce système τ_1 et des gains K_1 et K_2 , respectivement de $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_1 .

Réponse 3: La plus grande puissance de p est 1, l'ordre est donc de 1.

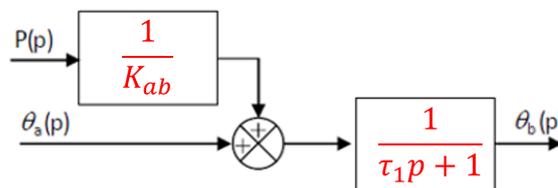
On identifie les gains $K_1 = 1$ et $K_2 = \frac{1}{K_{ab}}$ et la constante de temps

$$\tau_1 = \frac{m_b c_b}{K_{ab}} \text{ soit en application numérique } \tau_1 = 2500s$$

Question 4: Recopier sur votre et copie et compléter le schéma bloc suivant en n'utilisant que les variables K_{ab} et τ_1 :



Réponse 4:



Question 5: Exprimer $\theta_a(p)$ en fonction de $\theta_e(p)$ et de $\theta_b(p)$ et des variables m_a , c_a , K_{ae} et K_{ab} . Mettre sous la forme $\theta_a(p) = H_3(p)\theta_e(p) + H_4(p)\theta_b(p)$.

Réponse 5: $\theta_a(p)[m_a c_a p + K_{ae} + K_{ab}] = K_{ab} \theta_b(p) + K_{ae} \theta_e(p)$

$$\Leftrightarrow \theta_a(p) = \frac{K_{ae}}{K_{ae} + K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p + 1} \theta_e(p) + \frac{K_{ab}}{K_{ae} + K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p + 1} \theta_b(p)$$

soit $H_3(p) = \frac{K_{ae}}{K_{ae} + K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p + 1}$

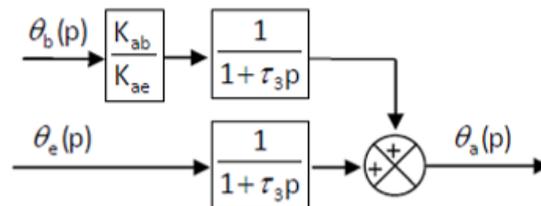
et $H_4(p) = \frac{K_{ab}}{K_{ae} + K_{ab}} \frac{1}{\frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p + 1}$.

Question 6: Préciser l'ordre des fonctions de transfert $H_3(p)$ et $H_4(p)$. Définir les expressions littérales de la constante de temps de ce système τ_3 et des gains K_3 et K_4 , respectivement de $H_3(p)$ et $H_4(p)$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_3 .

Réponse 6: La plus grande puissance de p est 1, les ordres sont donc de 1.

On identifie les gains $K_3 = \frac{K_{ae}}{K_{ae} + K_{ab}}$ et $K_4 = \frac{K_{ab}}{K_{ae} + K_{ab}}$ et la constante de temps $\tau_3 = \frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}}$ soit en application numérique $\tau_3 = 3s$

Dans la suite de l'étude, on suppose que K_{ae} est très grand devant K_{ab} , ainsi le schéma bloc ayant pour entrées $\theta_b(p)$ et $\theta_e(p)$ et pour sortie $\theta_a(p)$ peut se mettre sous la forme suivante :



Question 7: Exprimer $\theta_e(p)$ en fonction de $\theta_a(p)$ et de $\theta_{ext}(p)$. Préciser l'ordre de cette fonction ainsi que les expressions littérales de ses caractéristiques K_5 et τ_5 . Calculer la valeur numérique approchée de τ_5 .

Réponse 7: $\theta_e(p)[m_e c_e p + 2K_{ae}] = K_{ae}\theta_{ext}(p) + K_{ae}\theta_a(p)$

$$\Leftrightarrow \theta_e(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{m_e c_e}{2K_{ae}} p + 1} (\theta_{ext}(p) + \theta_a(p))$$

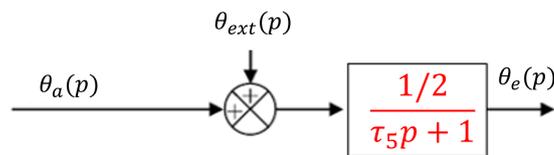
L'ordre de cette fonction est 1. On identifie le gain $K_5 = \frac{1}{2}$ et la constante

de temps $\tau_5 = \frac{m_e c_e}{2K_{ae}}$ soit en application numérique $\tau_5 = 250s$.

On peut noter $H_5(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{m_e c_e}{2K_{ae}} p} = \frac{K_5}{1 + \tau_5 p}$

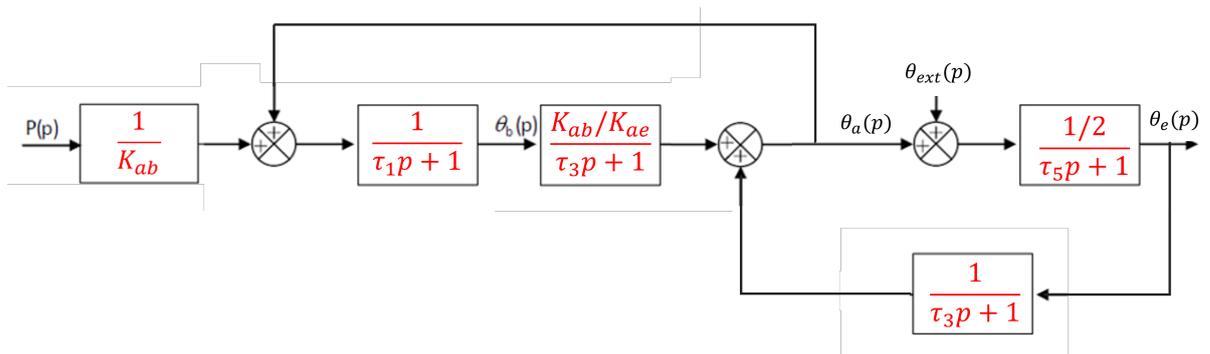
Question 8: Réaliser un schéma bloc (un comparateur et un bloc) ayant pour entrée $\theta_a(p)$, pour sortie $\theta_e(p)$ et pour perturbation $\theta_{ext}(p)$, pour cela utiliser uniquement K_5 et τ_5 .

Réponse 8:

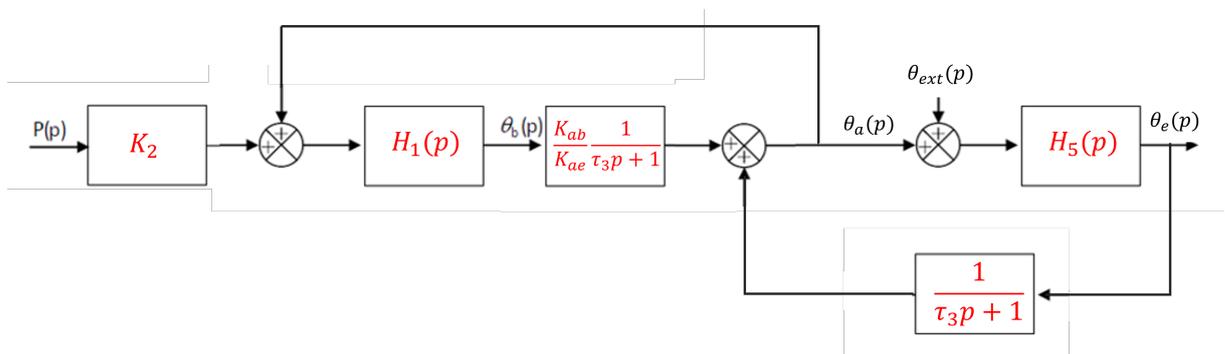


Question 9: Réaliser le schéma bloc du système global. Celui-ci a pour entrée $P(p)$, pour sortie $\theta_e(p)$ et pour perturbation $\theta_{ext}(p)$. Dans les blocs, on ne fera apparaître que les paramètres suivants : K_{ab} , K_{ae} , τ_1 , τ_3 et τ_5 . Ne pas oublier de placer les liens $\theta_a(p)$ et $\theta_b(p)$.

Réponse 9:

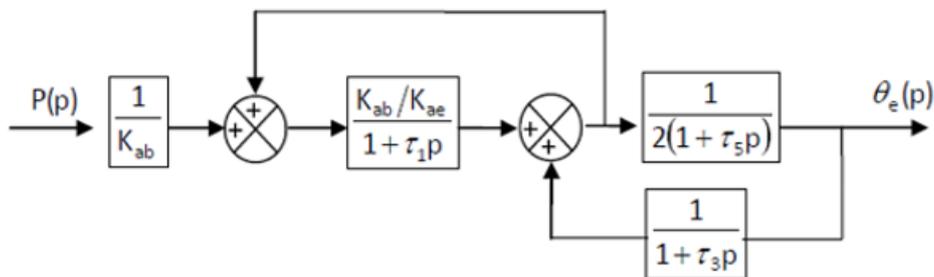


Soit :



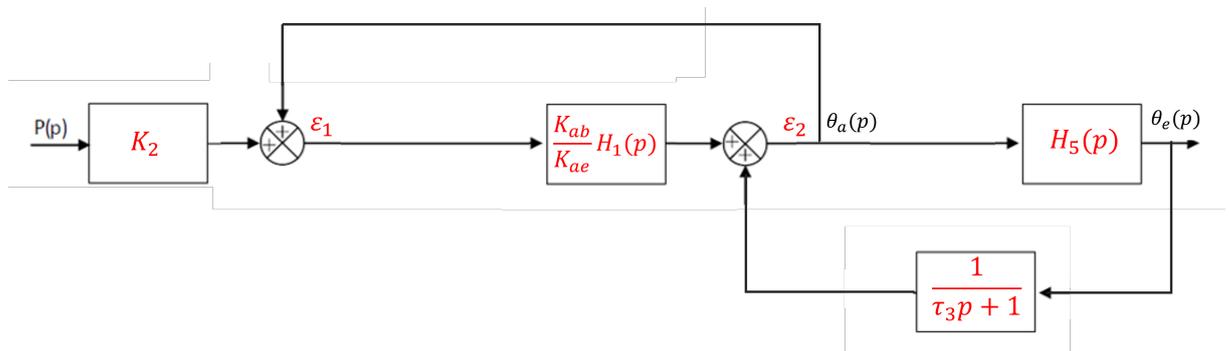
1.2 Étude des performances du corps de chauffe de la chaudière

On s'intéresse dans cette partie aux performances du système de corps de chauffe à partir du modèle SLCI construit précédemment. Pour cette étude on considérera que $\theta_{ext}(p) = 0$, de plus comme la constante de temps τ_1 est grande devant τ_3 , le schéma bloc du système peut alors se simplifier par la forme suivante :



Question 10: Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_e(p)}{P(p)}$.

Réponse 10: Avec $\theta_{ext}(p) = 0$ et $\tau_1 \gg \tau_3$ on obtient le schéma bloc proposé ci-dessus.
En remplaçant par les fonctions de transfert il vient :



Première méthode via équation :

On cherche $H(p) = \frac{\theta_e(p)}{P(p)}$. On écrit les expressions des comparateurs :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \theta_a(p) + P(p)K_2 \\ \epsilon_2 = \theta_e(p) \frac{1}{1 + \tau_3 p} + \epsilon_1 H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}} \end{cases}$$

Or $\epsilon_2 = \theta_a(p)$ et $\theta_e(p) = \theta_a(p)H_5(p) \Leftrightarrow \theta_a(p) = \frac{\theta_e(p)}{H_5(p)}$ d'où $\epsilon_2 = \frac{\theta_e(p)}{H_5(p)}$.

En remplaçant dans la deuxième équation du système, il vient :

$$\frac{\theta_e(p)}{H_5(p)} = \theta_e(p) \frac{1}{1 + \tau_3 p} + \left[\frac{\theta_e(p)}{H_5(p)} + P(p)K_2 \right] H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta_e(p)}{H_5(p)} - \theta_e(p) \frac{1}{1 + \tau_3 p} - \frac{\theta_e(p)}{H_5(p)} H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}} = P(p)K_2 H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}}$$

$$\Leftrightarrow \theta_e(p) \left[\frac{1}{H_5(p)} - \frac{1}{1 + \tau_3 p} - \frac{H_1(p) K_{ab}}{H_5(p) K_{ae}} \right] = P(p)K_2 H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}}$$

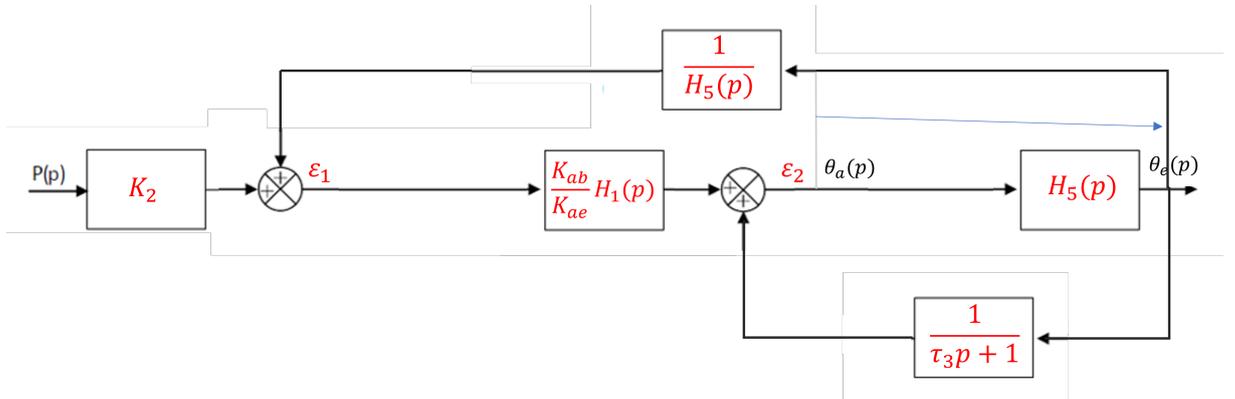
$$\Leftrightarrow \frac{\theta_e(p)}{P(p)} = K_2 H_1(p) \frac{K_{ab}}{K_{ae}} \frac{1}{\frac{1}{H_5(p)} - \frac{1}{1 + \tau_3 p} - \frac{H_1(p) K_{ab}}{H_5(p) K_{ae}}}$$

Soit en remplaçant, en mettant au même dénominateur et en simplifiant :

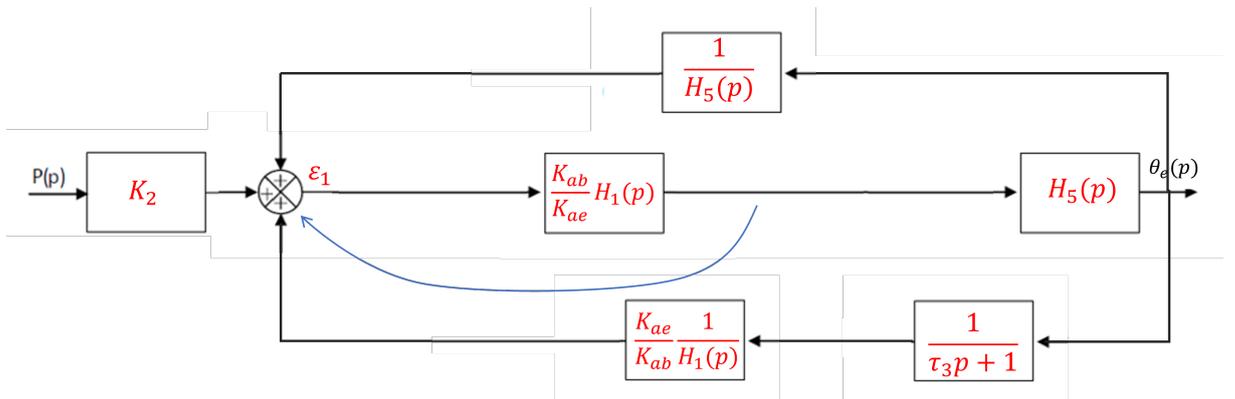
$$H(p) = \frac{(1 + \tau_3 p)}{2(1 + \tau_5 p)(1 + \tau_3 p)(1 + \tau_1 p)K_{ae} - K_{ae}(1 + \tau_1 p) - 2(1 + \tau_5 p)(1 + \tau_3 p)K_{ab}}$$

Réponse 10: Deuxième méthode via schéma bloc :

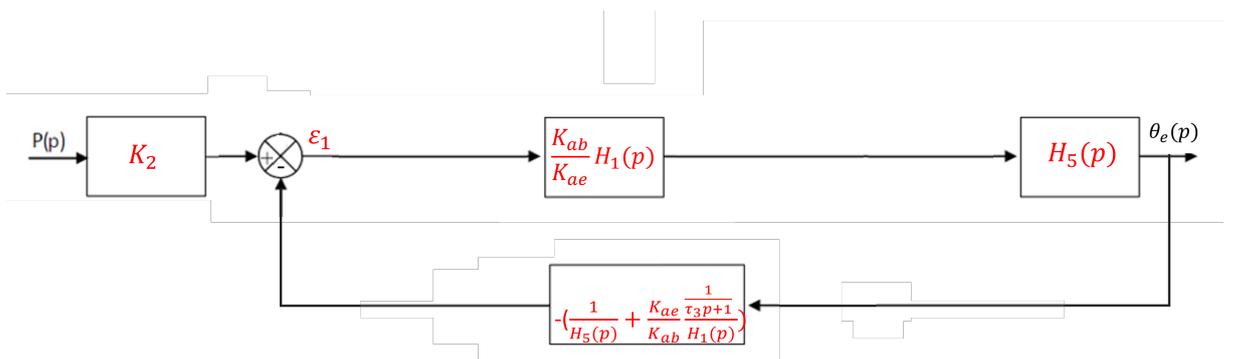
On décale le lien qui retourne vers ϵ_1 de sorte à retourner la sortie. Le retour sera alors multiplié par $H_5(p)$, on ajoute donc un bloc $\frac{1}{H_5(p)}$ sur le retour de sorte à ce que le retour ne soit pas modifié :



On décale ensuite le comparateur qui est au milieu du schéma bloc de sorte à se ramener à un seul comparateur :



Les deux retours sont maintenant en parallèles, on peut simplifier par un unique retour et ajouter un signe '-' sur le retour pour avoir une comparaison '+ / -' et se ramener à un schéma bloc nous permettant d'utiliser la formule de Black :



Réponse 10: Enfin, il vient :

$$H(p) = K_2 \frac{\frac{K_{ab}}{K_{ae}} H_1(p) H_5(p)}{1 - \frac{K_{ab}}{K_{ae}} H_1(p) H_5(p) \left[\frac{1}{H_5(p)} + \frac{K_{ae}}{K_{ab} H_1(p)} \frac{1}{1 + \tau_3 p} \right]}$$

Après simplification, on trouve (heureusement) les mêmes résultats qu'avec la première méthode.

Après applications numériques dans lesquelles on considère que $K_{ab} \ll K_{ae}$, $\tau_3 \ll \tau_5$ et $\tau_3 \ll \tau_1$, on obtient la fonction de transfert simplifiée

$$H_{simplifiée} = \frac{\theta_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400(1 + 2500p)(1 + 500p)}$$

Question 11: Déterminer à l'aide du modèle simplifié les valeurs initiales et finales prévisibles pour les températures de l'eau $\theta_e(t)$ pour une entrée en échelon correspondant à la puissance de chauffe définie dans le cahier des charges. Préciser les noms de théorèmes utilisés.

Réponse 11: On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta_e(t) = \lim_{t \rightarrow 0} p(t)h(t)$$

D'après le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t)h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p P(p) H_{simplifiée}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{P_0}{p} H_{simplifiée}(p) = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \theta_e(t) = 0}.$$

De manière analogue, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)h(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p P(p) H_{simplifiée}(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P_0}{p} \frac{1}{400(1 + 2500p)(1 + 500p)} \\ &= \frac{10000}{400} \text{ car } P_0 = 10kW \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = 25^\circ\text{C}}.$$

Question 12: Conclure par rapport au cahier des charges.

Réponse 12: Le cahier des charges spécifie une température de $25^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$ avec une puissance calorifique de $10kW$. D'après la modélisation, la température finale est de 25°C , le cahier des charges est donc respecté.