DM 2 - SI

Consignes

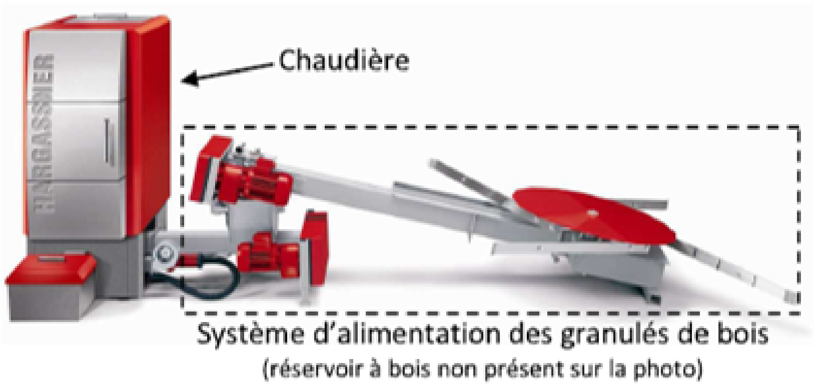
— Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...

— **Aucun retard ne sera accepté.**

Table des matières

1. Chaudière à granulés

On s'intéresse au corps de chauffe situé dans une chaudière à granulés de bois dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait partiel de cahier des charges.

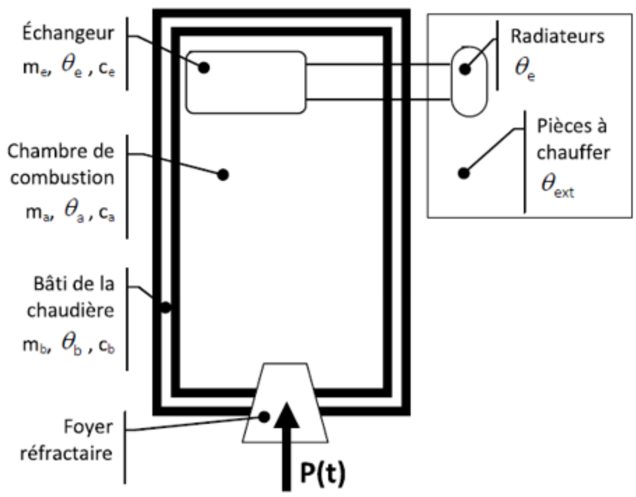


Exigences	Critères	Niveaux
1.1 Le système doit permettre le chauffage de bâtiments à partir de la combustion de granulés de bois	Température à atteindre dans la pièce à puissance nominale.	25°C ± 1°C pour une puissance calorifique de $P_0 = 10kW$.

1.1 Modélisation en SLCI du corps de chauffe de la chaudière

Pour ce modèle on considère que :

- $P(t)$ est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière.
- L'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur.
- L'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.
- Le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.



On note :

Notation	Grandeur	Valeur
$\theta_b(t)$	la température du bâti de la chaudière	
m_b	la masse du bâti à monter en température	$m_b = 200kg$
c_b	la capacité calorifique massique du bâti	$c_b = 500J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_a(t)$	la température de l'air dans al chambre de combustion	
m_a	la masse de l'air à monter en température	$m_a = 2kg$
c_a	la capacité calorifique massique de l'air	$c_a = 700J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_e(t)$	la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs	
m_e	la masse de l'eau à monter en température dans l'échangeur	$m_e = 50kg$
$\theta_a(t)$	la température de l'air dans al chambre de combustion	
c_e	la capacité calorifique massique de l'eau	$c_e = 4000J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\theta_{ext}(t)$	la température ambiante des pièces à chauffer	

On donne ci-dessous les équations issues du modèle de connaissance de la chaudière :

$$m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab}[\theta_b(t) - \theta_a(t)] = P(t) \tag{1}$$

$$m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae}[\theta_a(t) - \theta_e(t)] = K_{ab}[\theta_b(t) - \theta_a(t)] \tag{2}$$

$$m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae}[\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)] = K_{ae}[\theta_a(t) - \theta_e(t)] \tag{3}$$

Avec :

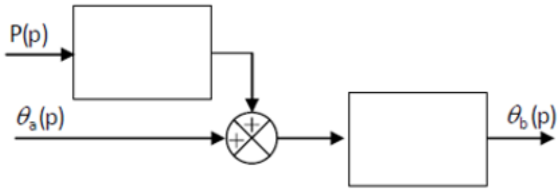
- K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion tel que $K_{ab} = 40J.s^{-1}.K^{-1}$;
- K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs tel que $K_{ae} = 400J.s^{-1}.K^{-1}$.

Question 1: En supposant des conditions initiales nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace la transformée des équations du modèle de connaissance présenté.

Question 2: Exprimer $\theta_b(p)$ en fonction de $\theta_a(p)$ et de $P(p)$ et des variables m_b, c_b et K_{ab}. Mettre sous le forme $\theta_b(p) = H_1(p)\theta_a(p) + H_2(p)P(p)$.

Question 3: Préciser l'ordre des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Définir les expressions littérales de la constante de temps de ce système τ_1 et des gains K_1 et K_2, respectivement de $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_1.

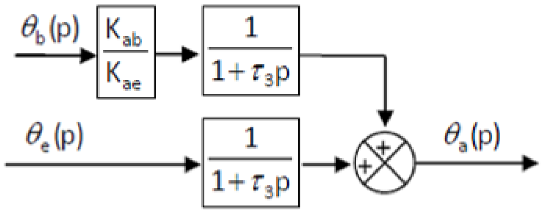
Question 4: Recopier sur votre et copie et compléter le schéma bloc suivant en n'utilisant que les variables K_{ab} et τ_1 :



Question 5: Exprimer $\theta_a(p)$ en fonction de $\theta_e(p)$ et de $\theta_b(p)$ et des variables m_a, c_a, K_{ae} et K_{ab}. Mettre sous le forme $\theta_a(p) = H_3(p)\theta_e(p) + H_4(p)\theta_b(p)$.

Question 6: Préciser l'ordre des fonctions de transfert $H_3(p)$ et $H_4(p)$. Définir les expressions littérales de la constante de temps de ce système τ_3 et des gains K_3 et K_4, respectivement de $H_3(p)$ et $H_4(p)$. Calculer la valeur numérique approchée de τ_3.

Dans la suite du l'étude, on suppose que K_{ae} est très grand devant K_{ab}, ainsi le schéma bloc ayant pour entrées $\theta_b(p)$ et $\theta_e(p)$ et pour sortie $\theta_b(p)$ peut se mettre sous la forme suivante :



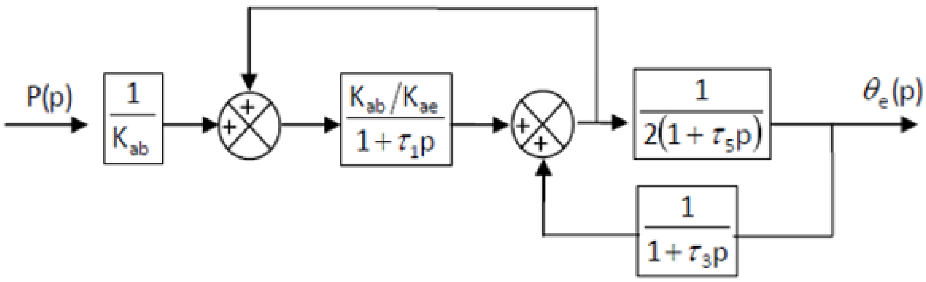
Question 7: Exprimer $\theta_e(p)$ en fonction de $\theta_a(p)$ et de $\theta_{ext}(p)$. Préciser l'ordre de cette fonction ainsi que les expressions littérales de ses caractéristiques K_5 et τ_5. Calculer la valeur numérique approchée de τ_5.

Question 8: Réaliser un schéma bloc (un comparateur et un bloc) ayant pour entrée $\theta_a(p)$, pour sortie $\theta_e(p)$ et pour perturbation $\theta_{ext}(p)$, pour cela utiliser uniquement K_5 et τ_5.

Question 9: Réaliser le schéma bloc du système global. Celui-ci a pour entrée $P(p)$, pour sortie $\theta_e(p)$ et pour perturbation $\theta_{ext}(p)$. Dans les blocs, on ne fera apparaître que les paramètres suivants : K_{ab}, K_{ae}, τ_1, τ_3 et τ_5. Ne pas oublier de placer les liens $\theta_a(p)$ et $\theta_b(p)$.

1.2 Étude des performances du corps de chauffe de la chaudière

On s'intéresse dans cette partie aux performances du système de corps de chauffe à partir du modèle SLCI construit précédemment. Pour cette étude on considérera que $\theta_{ext}(p) = 0$, de plus comme la constante de temps τ_1 est grande devant τ_3, le schéma bloc du système peut alors se simplifier par la forme suivante :



Question 10: Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\theta_e(p)}{P(p)}$.

Après applications numériques dans lesquelles on considère que $K_{ab} << K_{ae}$, $\tau_3 << \tau_5$ et $\tau_3 << \tau_1$, on obtient la fonction de transfert simplifiée

$$H_{simplifiée} = \frac{\theta_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400(1+2500p)(1+500p)}$$

Question 11: Déterminer à l'aide du modèle simplifié les valeurs initiales et finales prévisibles pour les températures de l'eau $\theta_e(t)$ pour une entrée en échelon correspondant à la puissance de chauffe définie dans le cahier des charges. Préciser les noms de théorèmes utilisés.

Question 12: Conclure par rapport au cahier des charges.